Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 8

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ГАЗА МЕТОДОМ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 7 IX 1944)

Примем обозначения: u и v — компоненты скорости в слое, ρ — плотность, p — давление, θ — абсолютная температура, τ — напряжение трения, μ — динамический коэффициент вязкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, $\overline{u}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\rho}$ и т. д. — соответственно значения величин на границе слоя, θ_0, ν_0 и т. д. — значения величин на поверхности профиля, Pr — число Прандтля, Ba — число Барстоу, $\varkappa$ — показатель адиабаты, $c = (\varkappa - 1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ba}^{-2}$.

Уравнения ламинарного пограничного слоя суть:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$c_p\left(\rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{dp}{dx} u + \frac{c_p}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{3}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\frac{\mu^2}{\overline{\mu}^2} = \frac{\theta}{\overline{\theta}} = \frac{\overline{\rho}}{\rho}. \tag{5}$$

Аналогично тому, как мы это уже делали для несжимаемой жидкости ([1]), применим к интегрированию системы (1) — (5) метод универсальных переменных. Именно, введем в качестве независимых переменных x и u, а в качестве функций

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\overline{\mu}\,\overline{\rho}} \tag{6}$$

и

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\overline{\mu}}. \tag{7}$$

В новых переменных система (1) — (5) сводится к уравнениям:

$$\tau_1^2 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial u^2} - \frac{\overline{u}\,\overline{u}'}{\overline{\mu}\,\overline{\rho}} \mu_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial u} - \frac{u}{\overline{\mu}\,\overline{\rho}} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \left[\frac{u}{\overline{\mu}\overline{\rho}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_1}\right) + \frac{\overline{u}\overline{u}'}{\overline{\mu}\overline{\rho}} \frac{\partial \mu_1}{\partial u}\right] \tau_1 = 0, \tag{8}$$

$$\tau_2\left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} + \frac{\mathrm{Pr}}{c_p \overline{\theta}}\right) + \frac{1 - \mathrm{Pr}}{2} \frac{\partial \tau_2}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \frac{2\,\mathrm{Pr}}{\overline{\mu}\overline{\rho}} u \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \frac{\mathrm{Pr}\,\overline{u}\overline{u}'}{\overline{\mu}\overline{\rho}} \mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = 0. \tag{9}$$

Здесь $\tau_2 = \tau_1^2$; $\theta_1 = \mu_1^2$ (безразмерная температура).

Граничные условия системы (8), (9) суть

$$\text{при } u=0: \quad \mu_1=\sqrt{\frac{\theta_0}{\overline{\theta}}}; \quad \left(\tau_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial u}\right)=-\frac{\overline{u}\overline{u}'}{\overline{\mu}\overline{\rho}}\mu_1; \tag{10}$$

$$\text{при } u=\overline{u}: \quad \mu_1=1, \quad \tau_1=0. \tag{11}$$

Пользуясь для конфузорной области разложениями вида:

$$\tau_1=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\, u_1{}^i, \tag{12}$$

$$\mu_1=\sum_{i=0}^{\infty} b_i(x)\, u_1{}^i, \tag{13}$$

получаем из уравнений (8) и (9) и граничных условий (10), (11) следующую серию уравнений (мы выпишем несколько первых):

$$b_0=\sqrt{\frac{\theta_0}{\overline{\theta}}}; \quad \frac{a_0 a_1}{b_0}=-\frac{\overline{u}^2\,\overline{u}'}{\overline{\mu}\,\overline{\rho}};$$

$$\sum a_i(x)=0, \quad \sum b_i(x)=1;$$

$$a_0{}^2 a_2=\frac{\overline{u}^2\,\overline{u}'}{2\overline{\mu}\,\overline{\rho}}(b_0 a_1-b_1 a_0); \quad a_0{}^2\left(2b_0 b_2+b_1{}^2+\frac{c}{2}\right)=\frac{\overline{u}^2\,\overline{y}'}{\overline{\mu}\overline{\rho}}\, b_0{}^2 b_1$$

и т. д.

Найдем распределение скоростей. На основании (6), (12) и (13) получаем:

$$\frac{\overline{\rho}}{\overline{u}}\, y=\frac{b_0}{a_0}u_1+\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{a_0}-\frac{a_1 b_0}{a_0{}^2}\right)u_1{}^2+\ldots \tag{14}$$

Расчет отрыва будет рассмотрен в другой нашей статье.

Поступило
7 IX 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Файнзильбер, ДАН, XLVIII, № 7 (1945).