Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ МЕЖДУ КОНСТАНТАМИ ТЕОРИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Обозначим через $S_{k,\alpha}(M)$ класс функций $f(x)$ действительной переменной $(-\infty < x < \infty)$, дифференцируемых $k \geqslant 0$ раз, причем

$$|f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)| \leqslant Mh^{\alpha} \quad (0 < \alpha \leqslant 1).$$

Очевидно, что если $f(x) \in S_{k,\alpha}(1) = S_{k,\alpha}$, то $Mf(x) \in S_{k,\alpha}(M)$ и $f(\lambda x) \in S_{k,\alpha}(\lambda^{k+\alpha})$. Отсюда следует, что $\frac{1}{\lambda^{k+\alpha}} f(\lambda x) \in S_{k,\alpha}$, т. е. принадлежит тому же классу, что $f(x)$.

Известно и легко проверить, что если $f(x) \in S_{k,\alpha}$, то наилучшее приближение $A_1 f(x)$ посредством целых функций первой степени ограничено, т. е. существует такая постоянная $c_{k,\alpha}$, что

$$A_1 f(x) \leqslant Mc_{k,\alpha} \quad (f(x) \in S_{k,\alpha}(M)).$$

Из сделанного выше замечания заключаем, что при любом $p > 0$

$$A_p f(x) = A_1 f\left(\frac{x}{p}\right) \leqslant \frac{M}{p^{k+\alpha}} c_{k,\alpha} \quad (f(x) \in S_{k,\alpha}(M)), \tag{1}$$

так как $f\left(\frac{x}{p}\right) \in S_{k,\alpha}\left(\frac{M}{p^{k+\alpha}}\right)$. Таким образом, в неравенстве (1) $c_{k,\alpha}$ не зависит от p. В аналогичных неравенствах (которые можно написать a priori)

$$E_n(f(x)) \leqslant \frac{M}{n^{k+\alpha}} c_{k,\alpha,n} \quad (f(x) \in S_{k,\alpha}(M)) \tag{1$^{\text{bis}}$}$$

для наилучшего приближения $f(x)$ многочленами степени n на отрезке $(-1, 1)$ и

$$E_n^* f(x) \leqslant \frac{M}{n^{k+\alpha}} d_{k,\alpha,n} \quad (f(x) \in S_{k,\alpha}(M)) \tag{1$^{\text{ter}}$}$$

периодической функции с периодом 2π тригонометрическими суммами порядка n ($n > 0$ целое число) постоянные $c_{k,\alpha,n}$ и $d_{k,\alpha,n}$, напротив, зависят от n; напомню, что в случае $\alpha = 1$ $d_{k,1,n} = c_{k,1}^* \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}$, где [3]

$$c_{k,1}^* = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{lk}}{(2l+1)^{k+2}},$$

так что $\lim\limits_{n=\infty} d_{k,1,n}=c^*_{k,1}$; кроме того, известно [1,2], что при $k=0$ $\lim\limits_{n=\infty} d_{0,\alpha,n}=\lim\limits_{n=\infty} c_{0,\alpha,n}=c_{0,\alpha}$.

Я хочу показать, что предельное равенство

$$\lim_{n=\infty} d_{k,\alpha,n}=\lim_{n=\infty} c_{k,\alpha,n}=c_{k,\alpha} \tag{2}$$

справедливо также при любых $k\geqslant 0$, $0<\alpha\leqslant 1$. Действительно, замечая, что $E_n f(x)=E_n\left(f\left(\frac{xn}{p}\right);\frac{n}{p}\right)$ и принимая во внимание, что утверждение $f(x)\in S_{k,\alpha}$ равноценно $\left(\frac{p}{n}\right)^{k+\alpha} f\left(\frac{nx}{p}\right)\in S_{k,\alpha}$, из ($1^{\text{bis}}$) заключаем, что для всякой функции $f(x)\in S_{k,\alpha}$ имеем при любом n

$$E_n\left(f(x);\frac{n}{p}\right)\leqslant\frac{c_{k,\alpha,n}}{p^{k+\alpha}}, \tag{3}$$

так что

$$A_p f(x)=\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\frac{n}{p+0}\right)\leqslant\frac{1}{p^{k+\alpha}}\lim_{n=\infty} c_{k,\alpha,n},$$

и, вследствие (1),

$$c_{k,\alpha}\leqslant\varliminf_{n=\infty} c_{k,\alpha,n}. \tag{4}$$

Кроме того, отсюда следует также, что

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\frac{n}{p+0}\right)\leqslant\frac{c_{k,\alpha}}{p^{k+\alpha}}\qquad (f(x)\in S_{k,\alpha}).$$

Поэтому, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, для всякой функции $(x)\in S_{k,\alpha}$ можем взять n_0 достаточно большим, чтобы при $n\geqslant n_0$

$$E_n\left(f(x);\frac{n}{1+\varepsilon}\right)<c_{k,\alpha}+\varepsilon,$$

откуда $c_{k,\alpha,n}<(c_{k,\alpha}+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{k+\alpha}$, т. е

$$\varlimsup_{n=\infty} c_{k,\alpha,n}\leqslant c_{k,\alpha}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует второе из равенств (2).

Принимая во внимание, что для периодических функций с периодом $2n\pi/p$

$$E^*_n\left(f(x);\frac{2n\pi}{p}\right)=E^*_n\left(f\left(\frac{nx}{p}\right)\right)=A_{n+\delta} f\left(\frac{nx}{p}\right) \tag{6}$$

при любом целом n и $0\leqslant\delta<1$, заключаем, что

$$d_{k,\alpha,n}\leqslant\left(\frac{n}{n+\delta}\right)^{k+\alpha} c_{k,\alpha}<c_{k,\alpha} \tag{7}$$

(полагая $d_{k,\alpha,n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+\alpha} c^*_{k,\alpha,n}$, имеем при всяком n даже более сильное неравенство $c^*_{k,\alpha,n}\leqslant c_{k,\alpha}$, которое, однако, нам здесь не понадобится). Нам остается показать, что ни при каком данном $\varepsilon>0$ неравенство

$$d_{k,\alpha,n}\leqslant c_{k,\alpha}-\varepsilon \tag{8}$$

не возможно для достаточно больших n. В самом деле, пусть для некоторой функции $f(x) \in S_{k,\alpha}$

$$A_1 f(x) = c_{k,\alpha} - {}^1/_2\, \varepsilon. \tag{9}$$

В таком случае, принимая во внимание, согласно теореме 5^{bis} ([4]), что

$$\lim_{L=\infty} E^*_{n,1}(f(x); L; R(x)) = A_1 f(x), \tag{10}$$

если n/L достаточно быстро растет *, подберем периодическую функцию $f_1(x) \in S_{k,\alpha}$ с периодом $2n\pi$, которая равна $f(x)$ при $-L \leqslant x \leqslant L$ и удовлетворяет, как и $f(x)$, неравенству $|f_1(x)| + A_1 f(x) < R(x)$. Если $\Sigma_{n,1}(x)$ есть тригонометрическая сумма n-го порядка (первой степени), наименее уклоняющаяся от $f_1(x)$, так что

$$|f_1(x) - \Sigma_{n,1}(x)| \leqslant E^*_n(f_1(x);\ 2n\pi) = E^*_n f_1(nx) \leqslant d_{k,\alpha,n},$$

то в промежутке $(-L, L)$ имеем также

$$|f(x) - \Sigma_{n,1}(x)| \leqslant d_{k,\alpha,n},$$

причем $|\Sigma_{n,1}(x)| < R(x)$ при всех x. Поэтому, вследствие (10) и (9), при достаточно больших n имеем

$$A_1 f(x) = c_{k,\alpha} - {}^1/_2\, \varepsilon < d_{k,\alpha,n} + {}^1/_4 \varepsilon_n,$$

что было бы невозможно, если бы допущение (8) было справедливо.

В частности, в силу вышеупомянутых значений констант $d_{k,1,n}$, имеем

$$c_{k,1} = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{lk}}{(2l+1)^{k+2}} \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Поступило
24 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, **52**, № 1 (1946). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, **53**, № 7 (1946). [3] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, 1940. [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, **54**, № 2 (1946).

* Напоминаю, что $E^*_{n,1}(f(x); L; R(x))$ есть наилучшее приближение $f(x)$ в промежутке $(-L, +L)$ при помощи тригонометрических полиномов n-го порядка $\Sigma_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos\frac{kx}{n} + b_k \sin\frac{kx}{n}$ периода $2n\pi > 2L$, которые при всех x удовлетворяют условию $|\Sigma_{n,1}(x)| < R(x)$, где $R(x)$ — любая данная четная функция нулевого рода (или многочлен) с неотрицательными коэффициентами.