Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Академик С. Л. СОБОЛЕВ

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. I

Решая волновое уравнение:

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

в области Ω переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ограниченной поверхностью S, при краевых условиях:

I) $$u|_S = 0$$

или (2)

II) $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0,$$

часто применяют метод Фурье разделения переменных. При этом получаемое общее решение задачи имеет вид

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j t} U_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Если рассматривать $u(x_1, \ldots, x_n)$ как функцию переменного t в соответственно построенном гильбертовом пространстве H, элементами которого служат функции n переменных $x_1 \ldots, x_n$, то решение это будет почти периодическим.

Muckenhoupt [1] для случая $n=1$ доказал почти периодичность решения, исходя из общих соображений, не прибегая к разделению переменных.

S. Bochner'ом и J. v. Neumann'ом установлено, что для весьма общего вида уравнения почти периодичность решения весьма легко следует из предположения, что траектория решения, т. е. множество всех значений, принимаемых u при любых t, будет компактным множеством в гильбертовом пространстве H.

В настоящей заметке мы дадим полное доказательство почти периодичности решений уравнения (1) при условиях I) или II) в некоторых предположениях относительно гладкости границы S и исследуемых решений. В следующих статьях мы избавимся от этих ограничений.

Пусть гильбертово пространство H состоит из пар комплексных функций $u_0(x_1, \ldots, x_n)$, $u_1(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что u_0 абсолютно непрерывна по каждому из переменных x_i при почти всех значениях остальных переменных и функции u_1 и $\partial u_0/\partial x_j$ интегрируемы с квадратом. Будем считать элемент h_0 эквивалентным нулю, если $u_0 = \mathrm{const}$, $u_1 = 0$ с точностью до множества точек меры нуль. Пусть h и g —

два каких-либо элемента, причем h есть пара u_0 и u_1, а g — пара v_0 и v_1. Определим скалярное произведение формулой

$$(h,\ g)=\overbrace{\int\limits_{\Omega}\cdots\int}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{v_0}}{\partial x_j}+u_1\ \overline{v_1}\ \right]d\Omega. \tag{4}$$

Пусть $u\ (x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ t)$ — решение уравнения (1) при условиях I) или II), непрерывно дифференцируемое два раза.

Составим упорядоченное множество $h\,(t)$ элементов из H, зависящее от параметра t:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n;\ t)&=u\,(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n;\ t),\\ \tilde{u}_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ t)&=\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\ldots,\ x_n;\ t),\end{aligned} \tag{5}$$

которое мы назовем траекторией. Функцию $u\,(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ t)$ мы назовем порождающей функцией траектории. Если $h\,(t)$ и $g\,(t)$ — две траектории, то, как хорошо известно:

$$\frac{d}{dt}(h,\ g)=0. \tag{6}$$

Равенство (6) называют законом сохранения энергии. Из (6) следует

$$(h,\ g)=\text{const},\quad (h,\ h)=\|\,h\,\|^{\,2}=\text{const}. \tag{7}$$

Таким образом, каждая траектория целиком лежит на некоторой сфере гильбертова пространства H. Обозначив $(h(t),\ h\,(t))=E_1\,(u)$, имеем $E_1\,(u)=\text{const}$.

Условимся называть билинейный функционал $L\,(h,\ g)$ интегралом некоторого множества траекторий нашей задачи, если он остается постоянным для всяких двух траекторий этого множества. Скалярное произведение $(h,\ g)$ будет при таком определении интегралом множества M_1 два раза дифференцируемых решений. Составим функционал:

$$\begin{aligned}Y_2\,(h,\,g)=\int\limits_{\Omega}\cdots\int\Bigg(&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j\partial x_k}\ \frac{\partial^2\overline{v_0}}{\partial x_j\partial x_k}+\\ &+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_j}\Bigg)d\Omega+\\ +\int\limits_{S}\cdots\int\Bigg[&\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{R_j}\frac{\partial u_0}{\partial l_j}\frac{\partial\overline{v_0}}{\partial l_j}+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{R_j}\right)\frac{\partial u_0}{\partial n}\frac{\partial \overline{v_0}}{\partial n}\Bigg]dS,\end{aligned} \tag{8}$$

где через R_j обозначены радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности S, а $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_{n-1}$ — направления касательных к этим главным нормальным сечениям. Область определенности $Y_2\,(h,\ g)$ очевидна.

Функционал $Y_2\,(h\,(t),\ g\,(t))$ сохраняет постоянное значение на всяких двух траекториях $h(t)$ и $g\,(t)$, принадлежащих множеству M_2, для которого порождающая функция и имеет непрерывные производные третьего порядка внутри области и непрерывные производные второго порядка в замкнутой области. Иными словами, $Y_2\,(h,\ g)$ есть интеграл множества M_2 траекторий нашей задачи.

Укажем путь доказательства этого предложения. Мы имеем:

$$Y_2\,(h\,(t_2),\,g\,(t_2))-Y_2\,(h\,(t_1),\,g\,(t_1))=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d\,Y_2(h\,(t'),g(t'))}{dt'}\,dt'. \tag{9}$$

Вычисляя dY_2/dt и преобразуя объемный интеграл в поверхностный, получим:

$$Y_2(h(t_2),\ g(t_2)) - Y_2(h(t_1),\ g(t_1)) = \tag{10}$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\int \dots \int\limits_S \left\{ \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{R_j} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{R_j} \frac{\partial u}{\partial l} \frac{\partial \bar{v}}{\partial l_i} \right] + \Phi \right\} dS \right] dt,$$

где

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} \, \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j d x_k} \, \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_j \partial t} \right) \cos n x_k. \tag{11}$$

Формула (10) доказывается сначала в предположении, что третьи производные от u непрерывны вплоть до границы. После этого можно заменить поверхность S внутренней поверхностью S^*. Перейдя к пределу в выражении для разности $Y_2^*(h(t_2), g(t_2)) - Y_2^*(h(t_1), g(t_1))$, получим (10). Дифференцируя граничные условия и пользуясь (1), можно доказать, что для задачи I)

$$\Phi = -\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{R_j} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \right], \tag{12}$$

а для задачи II)

$$\Phi = -\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{R_j} \frac{\partial u}{\partial l_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial l_j} \right]. \tag{13}$$

Обозначим

$$Y_2(h(t), h(t)) = E_2(u).$$

В равенстве

$$E_2(u) = A \tag{14}$$

значение постоянной A, как нетрудно видеть, полностью определяется начальными условиями. Из ограниченности $E_2(u)$ для любых t можно сделать заключение о компактности траектории.

Докажем, прежде всего, что отсюда следует:

$$\overbrace{\int \dots \int\limits_{\Omega}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right|^2 d\Omega \leqslant C, \tag{15}$$

где C — постоянная, не зависящая от t.

Для достаточно гладкой границы S поверхностный интеграл ψ в выражении E_2 может быть преобразован следующим образом:

$$\psi = \int \dots \int\limits_S \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{R_j} \left| \frac{\partial u}{\partial l_j} \right|^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{R_j} \right) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right] dS =$$

$$= \int \dots \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} G_{jks} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_j \partial x_s} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} H_{jk} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega, \tag{16}$$

где G_{jks} и H_{jk} суть некоторые ограниченные функции

$$|G_{jks}| \leqslant L, \quad |H_{jk}| \leqslant L. \tag{17}$$

Применяя к (16) известное неравенство:

$$|ab| \leqslant \frac{M}{2}\,|a|^2 + \frac{1}{2M}|b|^2, \tag{18}$$

справедливое при любых M, получим оценку:

$$\psi \leqslant n^2 L(1+M)E_1(u) + \frac{nL}{M}\int_{\Omega}\!\!\ldots\!\int \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right|^2 d\Omega. \tag{19}$$

Вибирая $M=2nL$, получим

$$\varphi \geqslant -n^2 L(1+2nL)E_1(u) - \frac{1}{2}\int_{\Omega}\!\!\ldots\!\int \sum_{j=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_f \partial x_k}\right|^2 d\Omega, \tag{20}$$

откуда, пользуясь явным выражением для $E_2(u)$, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\!\!\ldots\!\int \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right|^2 d\Omega \leqslant E_2(u) + n^2 L(1+2nL)E_1(u). \tag{21}$$

Из (21) и (14) сразу следует искомое неравенство (15).

Неравенство (15), как показано Кондрашовым (4), влечет за собою компактность функций $\partial u/\partial x_j$ и $\partial u/\partial t$ в L_2, откуда немедленно следует искомая компактность $h(t)$ в H.

Теорема Bochner'а дает почти периодичность решения.

Поступило
11 V 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. F. Muckenhoupt, J. Math. Phys. Massachusets Inst. of Technology, VIII, No. 3 (1929). [2] S. Bochner, Acta mathematica, 62 (1934). [3] S. Bochner and J. V. Neumann, Ann. Math., 36 (1935). [4] В. И. Кондрашов, ДАН, XLVIII, № 8 (1945).