Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

А. НОРДЕН

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПРОЕКТИВНОГО И КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 X 1944)

Поверхность m измерений X_m, погруженную в P_n*, будем называть нормализованной, если с каждой ее точкой x^α ** связаны две проективных плоскости: 1) P_{n-m}, содержащая эту точку и не инцидентная касательной плоскости T_m поверхности; 2) P_{m-1}, принадлежащая T_m, но не содержащая точки поверхности.

Будем называть эти плоскости нормализирующими многообразиями 1-го и 2-го рода и обозначать I и II, соответственно; нормализованную поверхность обозначим через A_m.

Вводя на A_m криволинейные координаты u^i, $i=1,2,\ldots,m$, определим плоскость II k точками

$$y_i^\alpha=\partial_i x^\alpha-l_i x^\alpha, \tag{1}$$

принадлежащими этой плоскости.

При умножении x^α на функциональный множитель σ, вектор l_i должен преобразоваться по следующему закону:

$$\tilde{l}_i=l_i-\partial_i \lg\sigma, \tag{2}$$

если плоскость II остается инвариантной.

Плоскость I определим $n-m+1$ независимыми точками

$$x^\alpha,\ \underset{s}{X}^\alpha,\quad s=1,2,\ldots,n-m.$$

Независимость точек x^α, y_i^α, $\underset{s}{X}^\alpha$ позволяет написать уравнения

$$\partial_j y_i^\alpha=A^k{}_{ij}y_k^\alpha+p_{ij}x^\alpha+\sum_{s=1}^{n-m}\underset{s}{B}_{ij}\underset{s}{X}^\alpha, \tag{3}$$

где p_{ij} и $\underset{s}{B}_{ij}$ — тензоры.

Альтернируя по индексам i и j и принимая во внимание уравнения (1), обнаружим симметрию выражений:

$$G_{ij}{}^k=A_{ij}{}^k-l_j\delta_i^k \tag{4}$$

по отношению к перестановке этих индексов.

Величины $G_{ij}{}^k$ не зависят от выбора точек $\underset{s}{X}^\alpha$, остаются инвариантными при умножении x^α на функциональный множитель и преобразуются как коэффициенты аффинной связности при преобразовании криволинейных координат.

---

* Через P_n, P_m и т. д. будем обозначать проективное пространство или проективную плоскость соответствующего числа измерений.

** Малые латинские буквы с греческим индексом обозначают однородные координаты. Греческий индекс пробегает значения от 1 до $n+1$.

Таким образом: на всякой A_m определяется симметричная аффинная связность, которую мы будем называть внутренней связностью или внутренней геометрией данной A_m.

Всякому псевдовектору v^i* многообразия криволинейных координат соответствует точка плоскости II

$$v^\alpha = v^i y_i^\alpha . \qquad (5)$$

Если назвать псевдовектор переносящимся параллельно во внутренней связности при условии

$$\delta v^i = \lambda v^i, \qquad (6)$$

то для такого его перенесения необходимо и достаточно, чтобы точка v^α испытывала бесконечно малое смещение в P_{n-m+1}, содержащей плоскость I.

Внутренняя связность вполне характеризуется этим фактом.

Геодезические линии этой связности характеризуются тем, что их соприкасающаяся P_{n-m+1} содержит многообразие I, откуда следует, что внутренняя связность подвергается проективному преобразованию при замене плоскостей II и неизменности плоскостей I.

Если $m=n$, т. е. многообразие X_m совпадает с P_n, то для его нормализации достаточно задать семейство гиперплоскостей II, находящихся в непрерывном соответствии с точками P_n. Геодезические линии внутренней геометрии A_n будут прямыми линиями, вследствие чего внутренняя геометрия будет проективно-плоской. Этим способом можно интерпретировать любую проективно-плоскую геометрию, и эта интерпретация совпадает с той, которая была предложена Bortolotti ([1]).

Если соответствие между точками и гиперплоскостями A_n взаимно однозначно, то с помощью коррелятивного преобразования можно построить другую проективно-евклидову геометрию, которая будет, вообще говоря, отлична от первой.

Будем называть эти геометрии внутренними геометриями первого и второго рода соответственно, определенными данным двойственным соответствием.

Если двойственное соответствие сводится к поляритету относительно гиперповерхности второго класса, то обе внутренние геометрии совпадают между собой и являются геометриями пространства постоянной кривизны, интерпретированными по Клейну. Если всякой точке P_n отнесена одна и та же гиперплоскость II, то внутренняя геометрия A_n будет аффинно-евклидовой с несобственной гиперплоскостью II.

Для тангенциальных координат касательных гиперплоскостей гиперповерхности A_{n-1} можно составить уравнения, аналогичные (4), и определить аналогично предыдущему на ней вторую внутреннюю связность с коэффициентами Γ_{ij}^k, вообще говоря отличными от G_{ij}^k. Таким образом на нормализованной гиперповерхности определяются две внутренние связности 1-го и 2-го рода соответственно.

Коэффициенты этих связностей удовлетворяют соотношениям

$$\partial_k B_{ij} - G_{ki}{}^l B_{lj} - \Gamma_{kj}{}^l B_{il} = \omega_k B_{ij}, \qquad (7)$$

где $B_{ij} = \underset{1}{B}_{ij}$ есть симметричный тензор, определяющий уравнением

$$B_{ij} du^i du^j = 0 \qquad (8)$$

асимптотический конус гиперповерхности. Смысл (7) состоит в том, что условие сопряженности двух псевдовекторов

$$B_{ij} v^i w^j = 0$$

---

* Т. е. вектору, заданному с точностью до скалярного множителя.

не нарушается, если каждый из них переносится параллельно в одной из двух внутренних связностей.

Внутренняя геометрия любой A_m ($m>1$) совпадает с внутренней геометрией в смысле Гаусса, если принять за абсолют пространства Клейна некоторую гиперповерхность 2-го класса и выбрать плоскость I вполне нормальной поверхности, а плоскость II считать полярной плоскости I относительно абсолюта. Что касается гиперповерхности, то в этом случае ее внутренняя геометрия 2-го рода будет тоже римановой с линейным элементом, выражающим угол между касательными гиперплоскостями в ее смежных точках.

Внутренняя связность любой A_m ($m>1$) совпадает со связностью, индуцированной псевдонормальной плоскостью I ([2]), если все многообразия II принадлежат несобственной гиперплоскости аффинного пространства.

Внутренняя геометрия 2-го рода гиперповерхности A_{n-1} будет в этом случае проективно-плоской и совпадает с внутренней геометрией 2-го рода на несобственной гиперплоскости, определяемой двойственным соответствием между плоскостями II и несобственными точками прямых I.

Если это соответствие есть поляритет относительно абсолюта евклидова пространства, то геометрия 2-го рода A_{n-1} есть геометрия ее сферического отображения.

Поверхность X_m в пространстве M_n комформной группы Мебиуса мы будем называть нормализованной и обозначать W_m, если в каждой ее точке задана сфера S $n-m$ измерений, проходящая через эту точку и вполне нормальная поверхности.

Воспользуемся возможностью отобразить сферы M_n в точки P_{n+1}, причем точки M_n переходят в точки гиперквадрики Q_n. При этом X_m отобразится в поверхность, принадлежащую Q_n, а сфера S в сечение Q_n плоскостью P_{n-m+1}. Приняв эту плоскость за многообразие I и выбрав за II ее поляру относительно Q_n, получим некоторое A_m в пространстве P_{n+1} как отображение данной W_m. Внутреннюю геометрию A_m будем называть внутренней геометрией соответствующей W_m пространства Мебиуса. Эта геометрия будет геометрией Вейля, а ее угловая метрика совпадает с метрикой, индуцированной на X_m внешним пространством M_n. Если $m=n$, т. е. X_m совпадает с M_n, то для ее нормализации достаточно отнести всякой ее точке другую нормализующую точку.

Таким образом всякое непрерывное точечное соответствие определяет в M_n некоторую геометрию Вейля, которая будет конформно-евклидовой. Обратно, всякая геометрия такого типа может быть интерпретирована с помощью построения некоторого точечного соответствия в M_n.

Если это соответствие сводится к инверсии относительно гиперсферы, то определенная им внутренняя геометрия будет геометрией пространства постоянной кривизны, интерпретированного по схеме Пуанкаре.

Поступило
13 X 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bortolotti, Annali di matematica pura ed applicata, IV, s. 11, 111 (1932).
[2] Скоутен и Строек, Введение в новые методы дифференц. геометрии, ч. I, § 9, 1939.