Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

В. И. КОНДРАШОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ L_p^ν

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 VI 1943)

L_p^ν $(p \geqslant 1)$ представляет собой линейное функциональное пространство функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, заданных в области D n-мерного пространства и имеющих C-производные *, суммируемые со степенью p до порядка ν включительно ([1],[2]). В настоящей заметке под D будет подразумеваться ограниченная область, исключения будут оговорены.

1. Введем в L_p^ν метрику формулой

$$\rho(\varphi, \psi) = \left[\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{D} \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l (\varphi - \psi)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \right]^{\frac{1}{p}}.$$

2. Укажем некоторые простые свойства рассматриваемых пространств:

а) L_p^ν есть полное пространство;

б) если одновременно все $\dfrac{\partial^\alpha \varphi_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \xrightarrow{\text{слабо}} \dfrac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ в смысле L_p $\left(\sum \alpha_j = \alpha = 0, 1, \ldots, \nu\right)$, то $\varphi_i \xrightarrow{\text{слабо}} \varphi$ в L_p^ν;

в) сфера $\rho(0, \varphi) \leqslant A$ слабо компактна в L_p^ν $(p > 1)$.

Под $\overline{L_p^\nu}$ будем в дальнейшем понимать линейное многообразие всех элементов L_p^ν, являющихся функциями, имеющими непрерывные производные до порядка ν включительно. Тогда

г) $\overline{L_p^\nu}$ всюду плотно в L_p^ν.

Для областей D, любая точка которых достигается при помощи подвижного шарового сектора постоянной величины и формы, С. Л. Соболевым доказана следующая теорема.

3. Единичный шар L_p^ν есть часть шара: 1) любого пространства $L^{\nu-k}_{\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{k}{n}}}$, если $1 > \frac{1}{p} > \frac{k}{n}$; 2) какого угодно из пространств $L_{q^{**}}^{\nu-k}$, $q^{**} > 0$, при $1 > \frac{1}{p} = \frac{k}{n}$; 3) всякого пространства $L_{q^*}^{\nu-k}$, где $q^* < q =$

---

* C-производные следует понимать как производные согласно определению С. Л. Соболева (см. ([1]), стр. 483).

$=\frac{1}{1-\frac{k}{n}}$, если $p=1$; 4) произвольного пространства $C^{\nu-k}=$ $=C^{\nu-\left[\frac{n}{p}\right]-1}$, когда $\frac{1}{p}<\frac{k}{n}$ *; наконец; 5) пространства C с условием только, что $n=k$, $p=1$.

4. В данной работе устанавливается следующее основное положение:

Ограниченное в L_p^ν множество $\rho(0, \varphi)\leqslant A$ компактно в пространствах, куда оно вкладывается: 1) в $L_{q^*}^{\nu-k}$, $q^*<q=\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{k}{n}}$, если

$1>\frac{1}{p}>\frac{k}{n}$; 2) в $L_{q^{**}}^{\nu-k}$, $q^{**}>0$, когда $1>\frac{1}{p}=\frac{k}{n}$; 3) в $L_{q^*}^{\nu-k}$,

$q^*<q=\frac{1}{1-\frac{k}{p}}$, если $p=1$; 4) в $C^{\nu-k}=C^{\nu-\left[\frac{n}{p}\right]-1}$, где $\frac{1}{p}<\frac{k}{n}$ [1,3].

В случае $p>1$ предельные функции φ для последовательностей φ_i, выделяемых согласно отмеченной компактности, принадлежат L_p^ν. Сходимость ν-х производных элементов φ_i к C-производным функций φ — слабая (в смысле L_p).

Возможны несколько иные формулировки теорем **3** и **4** для $\overline{L_p^\nu}$.

Рассмотрим множество функций φ, подчиненных таким условиям

$$1)\ \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S_{n-1}}\left|\frac{\partial^l\varphi(x_1',\ldots,x_n')}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|dS_{n-1}\leqslant A\quad\left(\sum\alpha=l=0,\ 1,\ldots,\nu-1\right).$$

S_{n-1} — кусок гладкого многообразия $(n-1)$ измерения, расположенный либо в D, либо на границе D; $x_1',\ldots,x_n'$ — близкая к соответствующей ей на S_{n-1} внутренняя точка (в D).

$$2)\ \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{D}\sum_{\Sigma\alpha=\nu}\left|\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|^p dx_1\ldots dx_n\leqslant A.$$

Выделенная совокупность ограничена в L_p^ν.

5. Возьмем L_p^k. Предположим, что функции $\varphi\subset L_p^k$, $\rho(0, \varphi)\leqslant A$, равны нулю вне области D. Условимся во всем дальнейшем обозначать различные постоянные, не зависящие от рассматриваемых функций и вводимых величин h_i и δ, через C с различными нижними индексами. Положим также $M+h=(x_1+h,\ldots, x_n+h)$; $M=(x_1,\ldots,x_n)$, $dx_1\ldots dx_n=dm$. Будем считать, что $\max|h_i|=\delta$ $(i=1, 2,\ldots, n)$.

Справедливы следующие оценки.

а) Область D ограничена

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{D}|\varphi(M+h)-\varphi(M)|^{q^*}dm\leqslant$$

---

* При $n=2$ для $\overline{L_2^1}$ с более узким классом областей D Рейлихом (Геттинген) была установлена компактность только в L_2.

$$
\leqslant C_{01}\left|\begin{array}{ll}
\delta^{\left(1-\frac{q^*}{q}\right)} & \dfrac{1}{q^*}>\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{k}{n},\ p>1, \dfrac{1}{p}>\dfrac{k}{n}; \\[2ex]
\delta^{\left(1-\frac{q^*}{q^{**}}\right)} & q^{**}>0 \text{ любое число, } \dfrac{1}{p}=\dfrac{k}{n}, \\[1ex]
 & \dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q^*}\left(\dfrac{n-1}{n}\right),\ p_1 \text{ даст } q^*; \\[2ex]
\delta^{\left(1\ \frac{q^*}{q_1^*}\right)} & q^*<q_1{}^*<\dfrac{1}{1-\dfrac{k}{n}},\ p=1.
\end{array}\right.
$$

б) Область D — все пространство, из которого могут быть изъяты конечные куски достаточно гладких многообразий измерения, меньшего n.

$$1<p\leqslant\frac{n}{k}.$$

$$
\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n} |\varphi(M+h)-\varphi(M)|^{q^*}\,dm\leqslant C_{02}\left|\begin{array}{ll}
\delta^{q^*} & \dfrac{1}{q^*}>\dfrac{1}{p}-\dfrac{k-1}{n}, \\[2ex]
\delta^{q^*}|\ln\delta|^{\frac{q^*\,(p-}{p}} & \dfrac{1}{q^*}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{k-1}{n}, \\[2ex]
\delta^{q^*\left[k-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right]} & \dfrac{1}{q^*}<\dfrac{1}{p}-\dfrac{k-1}{n}.
\end{array}\right.
$$

Если $p=\frac{n}{k}$, то следует применять оценки, беря $p'<p$ так, что $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}=\frac{1}{q^*}\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

$$p=1$$

$$\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n} |\varphi(M+h)-\varphi(M)|^{q^*}\,dm\leqslant C_{03}\delta^{q^*(1-\varepsilon)},\quad \frac{1}{q^*}>1-\frac{k+\varepsilon-1}{n}.$$

в) $p>\frac{n}{k}$ (2,3), $k=\frac{m+n}{p}$, $m>0$.

$$
|\varphi(M+h)-\varphi(M)|^p\leqslant C_{04}\left|\begin{array}{ll}
\delta^m & m<p, \\
\delta^p|\ln\delta|^{p-1} & m=p, \\
\delta^p & m>p.
\end{array}\right.
$$

Целесообразно сейчас же привести краткий план доказательств. Рассуждения проводятся для $\overline{L}_p^k$. Утверждаются только что выписанные оценки. Неравенства 5 а) и 5 в) вместе с 1) — 4) пункта 3 создают возможность использования теорем Рица (условие компактности в L_p) и Арцеля для подтверждения предложения 4 в ограниченных областях. Установленное справедливо во всяком случае и в любой ограниченной части рассматриваемых видов неограниченных областей. Средние функции позволяют перевести результат и на L_p^ν. В этом направлении возможно, опираясь на свойства пространств (полнота и т. п.), использовать теорему Фреше.

Укажем лишь идею доказательства указанных оценок. Эта идея основана на применении тождества, представляющего значение функции φ в вершине некоторого сектора через значения производных внутри такого сектора, предложенного С. Л. Соболевым [2], причем в процессе рассуждений оказывается целесообразным использовать теорему С. Л. Соболева об интегралах типа потенциала [1]. Укажем еще, что несколько обобщая основную теорему об интегралах типа потенциала [1], не упуская из вида сущности проведенных рассуждений, можно для $\overline{L}_p^{\nu}$ получить оценки в связи с многообразием различного числа измерений (дополнительно к опубликованным в [2,3]).

Возможно развитие в направлении данной работы и теорем И. Г. Петровского и К. Н. Смирнова (о равностепенной непрерывности). Соотношения, аналогичные неравенствам Фридрихса, позволяют связать формулировку предложения **4** с условиями на многообразиях $n-1$ измерения.

Некоторые из приложений результатов изложенного будут разобраны самостоятельно.

Поступило
21 VI 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Матем. сб., **4** (46), № 3 (1938). [2] С. Л. Соболев, ДАН, I (X), 7 (84), 267 (1936). [3] В. И. Кондрашов, ДАН, XVIII, 236 (1938).