Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 4

ГИДРОДИНАМИКА

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

К ВОПРОСУ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 VII 1944)

1. Во многих нефтяных месторождениях приток нефти к скважинам происходит под напором краевых вод, окружающих область, занятую нефтью. Л. С. Лейбензоном [1] была поставлена задача: в начальный момент времени в пористой среде дана плоская область, занятая жидкостью. Внутри области находятся скважины. Спрашивается, как будет перемещаться контур области, если считать, что давления на контуре области и контурах скважин все время сохраняют заданные постоянные значения. Такая постановка задачи соответствует предположению, что во внешней области находится жидкость, вязкость которой равна нулю.

Как обычно, считаем, что скорость фильтрации имеет потенциал:

$$u = m\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = m\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \varphi = \frac{k}{\mu}p(x, y, t), \tag{1}$$

p — давление жидкости, k — проницаемость грунта, μ — вязкость жидкости, m — пористость грунта, t — время.

Контуром области является линия

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{k}{\mu}p_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Дифференцируя это уравнение по t, найдем условие, которое должно выполняться на контуре во все время движения:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = -m\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{3}$$

На вспомогательной плоскости ζ рассмотрим n равноотстоящих скважин, расположенных внутри единичного круга на окружности $r = |\zeta_0| < 1$. Комплексный потенциал течения будет:

$$\omega(\zeta) = -\frac{Q}{2\pi}\lg\frac{\zeta^n - \zeta_0^n}{1 - \bar{\zeta}_0^n\zeta^n}. \tag{4}$$

Отобразим круговую область плоскости ζ на некоторую область плоскости z с помощью уравнения

$$z = f(\zeta) = A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots \tag{5}$$

Течение на плоскости z будет характеризоваться функцией (4), причем для дебита Q скважин имеем

$$Q = \frac{2\pi(p_0 - p_1)k}{\mu\lg\dfrac{(1 - \zeta_0^n\bar{\zeta}_0^n)\,|f'(\zeta_0)|}{n\delta\,|\zeta_0|^{n-1}}} = \frac{2\pi k\Delta pq}{\mu\lg\dfrac{(1 - c^{2n})f'(c)}{n\delta c^{n-1}}} = M_0 q, \tag{6}$$

δ — радиус скважины; $c = \zeta_0$ при $t = 0$; p_0 и p — давления на контуре области и контуре скважины.

При $t = 0$ считаем $A_1, A_2, \ldots$ заданными. Ищем зависимость $A_2, \ldots$ от t.

Для $f(\zeta)$ находим с помощью (3) уравнение

$$\bar{\zeta} \dot{f}(\zeta) f'(\bar{\zeta}) + \zeta \dot{f}(\bar{\zeta}) f'(\zeta) = -q \frac{1 - \zeta_0^n \bar{\zeta}_0^n}{\left(1 - \frac{\zeta_0^n}{\zeta^n}\right)(1 - \bar{\zeta}_0^n \zeta^n)}. \tag{7}$$

Штрих означает дифференцирование по ζ, точка — по безразмерному времени τ, связанному с t так:

$$\tau = \frac{M_0 n}{\pi m} t = \frac{2kn\Delta p}{\mu m \lg \frac{(1-c^{2n}) f'(c)}{n\delta c^{n-1}}} t. \tag{8}$$

Будем считать ζ_0 и A_k вещественными, что отвечает случаю симметричного контура. Полагая в (5) $\zeta = e^{i\varphi}$, получим из (6):

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(\dot{A}_1 e^{i\varphi} + \dot{A}_2 e^{2i\varphi} + \ldots)(A_1 e^{-i\varphi} + 2A_2 e^{-2i\varphi} + \ldots) &= \\ = -q(1 + 2\zeta_0^n \cos n\varphi + 2\zeta_0^{2n} \cos 2n\varphi + \ldots), \end{aligned} \tag{9}$$

откуда найдем систему уравнений для A_k:

$$\begin{gathered} A_1 \dot{A}_1 + 2A_2 \dot{A}_2 + 3A_3 \dot{A}_3 + \ldots = -q/2, \\ A_1 \dot{A}_2 + 2A_2 \dot{A}_3 + \ldots + 2A_2 \dot{A}_1 + 3A_3 \dot{A}_2 + \ldots = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 \dot{A}_{n+1} + \ldots + (n+1) A_{n+1} \dot{A}_1 + \ldots = -\zeta_0^n q, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 \dot{A}_{2n+1} + \ldots + (2n+1) A_{2n+1} \dot{A}_1 + \ldots = -\zeta_0^{2n} q; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{10}$$

2. Начальный контур — единичная окружность. Пусть скважины расположены на расстоянии $c < 1$ от центра круга. Тогда при $t = 0$ $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = \ldots = 0$, и из системы (10) найдем, что при $t = 0$

$$\dot{A}_1 = -{}^1/_2, \quad \dot{A}_{n+1} = -c^n, \quad \dot{A}_{kn+1} = -c^{kn}, \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

все остальные $\dot{A}_k$ равны нулю.

Дифференцируя (10) по t, найдем для $t = 0$:

$$\begin{gathered} \ddot{A}_1 = -\frac{1}{4(1-c^{2n})^2}\left\{1 - 3c^{4n} + (4n+2)c^{2n} + \frac{n}{2\gamma}(1 + 4c^{2n} + c^{4n})\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ddot{A}_{n+1} = -\frac{c^n}{(1-c^{2n})^2}\left\{(n+1)(1 - c^{4n}) + 2nc^{2n} + \frac{n}{2\gamma}(1 + 4c^{2n} + c^{4n})\right\}, \\ \ddot{A}_{2n+1} = -\frac{c^{2n}}{(1-c^{2n})^2}\left\{(2n+1)(1 - c^{4n}) + 2nc^{2n} + \frac{n}{2\gamma}(1 + c^{2n} + c^{4n})\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma = \lg \frac{1 - c^{2n}}{n\delta c^{n-1}}. \end{gathered} \tag{12}$$

Третьи производные имеют более громоздкий вид. Однако при сколько-нибудь значительном числе скважин величины $c^{2n}, c^{4n}, \ldots$ малы по сравнению с единицей и ими можно пренебрегать, что сильно упрощает формулы.

Для точки x_0, наиболее близкой к скважине, имеем

$$x_0 = A_1 + A_{n+1} + \ldots + A_{2n+1} + \ldots = 1 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \ldots, \quad (13)$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{1+c^n}{1-c^n},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1+(4n+2)c^n + 4nc^{2n} + (4n-2)c^{3n} - c^{4n} + \dfrac{n}{\gamma}(1+4c^{2n}+c^{4n})}{8(1-c^{2n})(1-c^n)^2}, \quad (14)$$

$$\alpha_3 = -\frac{P_1(c) + \dfrac{1}{\gamma}P_2(c) + \dfrac{3n^2}{\gamma^2}(1+4c^{2n}+c^{4n})^2}{48(1-c^n)^5(1+c^n)^3}.$$

$$P_1(c) = 3 + (6n^2+18n+18)c^n + (36n^2+60n+12)c^{2n} + (90n^2+82n+2)c^{3n} + \\ + (120n^2-30)c^{4n} + (90n^2-34n-26)c^{5n} + (36n^2-60n+12)c^{6n} + \\ + (6n^2-18n+6)c^{7n} + 3c^{8n},$$

$$P_2(c) = 5n + (10n^2+8n)c^n + (36n^2+27n+1)c^{2n} + (50n^2+28n)c^{3n} + \\ + (108n^2-n+1)c^{4n} + (50n^2-8n)c^{5n} + (36n^2-27n-1)c^{6n} + \\ + (10n^2-4n)c^{7n} - (4n+1)c^{8n}.$$

Радиус-вектор точки, наиболее медленно перемещающейся, получим заменой c на $-c$ в выражении x_0.

Изменение дебита со временем определяется по формуле

$$Q = Q_0\left[1 + \frac{n(1+4c^{2n}+c^{4n})}{2\gamma(1-c^{2n})^2}\tau + \frac{P(c) + \dfrac{3n^2}{\gamma}(1+4c^{2n}+c^{4n})^2}{8\gamma(1-c^{2n})^2}\tau^2 + \ldots\right], \quad (15)$$

$$P(c) = 2n + (24n^2+15n+1)c^{2n} + (60n^2-n+1)c^{4n} + \\ + (24n^2-15n-1)c^{6n} - (n+1)c^{8n}.$$

Для одной скважины ($n=1$) можно написать $f(\zeta)$ так:

$$z = f(\zeta) = \zeta - \frac{\tau}{2}\,\frac{\zeta(1+c\zeta)}{1-c\zeta} -$$

$$-\frac{\tau^2\zeta}{8(1-c^2)^2}\left\{1 + 6c^2 - 3c^4 + \frac{8c(1+c^2-c^4) - 4c^2(1+2c^2-c^4)\zeta^2}{(1-c\zeta)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+4c^2+c^4)(1+c\zeta)}{\gamma(1-c\zeta)}\right\} + \ldots \quad (16)$$

Точка ζ_0 перемещается, приближаясь к контуру. В момент начала обводнения скважин $\zeta_0 = 1$. При $n=1$, $\zeta_0 = 0$ (в этом случае ζ_0 все время равно нулю) формула (7) перейдет в уравнение, полученное Л. А. Галиным ([2]).

3. Начальный контур — кардиоида. Пусть ее уравнение будет

$$z = \zeta + a\zeta^2, \quad \zeta = e^{i\varphi}.$$

Считаем $a < 1/2$, чтобы кривая не имела двойной точки. Скважине $z = z_0$, взятой на оси x, соответствует $\zeta = \zeta_0$; при $t=0$ $\zeta_0 = c$. Система (10) дает:

$$\dot{A}_1 + 2a\dot{A}_2 = -1/2, \quad 2a\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + 2a\dot{A}_3 = -c,$$
$$\dot{A}_k + 2a\dot{A}^{k+1} = -c^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \quad (17)$$

Одно из чисел, например $\dot{A}_1$, остается произвольным. Существует единственное значение

$$\dot{A}_1 = -\frac{1-2ac}{2(1+2ac)(1-4a^2)},$$

при котором получаемые ряды сходятся. Тогда

$$\dot{A}_2 = -\frac{1}{4a} + \frac{1-2ac}{4a(1+2ac)(1-4a^2)}, \quad \dot{A}_k = -\frac{c^k}{1+2ac} \quad (k = 3, 4, \ldots).$$

Для скважины, находящейся в точке $z_0 = 0$ $(c = 0)$, решение имеет вид полинома:

$$z = A_1(t)\zeta + A_2(t)\zeta^2,$$

$A_1(t)$ и $A_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$A_1\dot{A}_1 + 2A_2\dot{A}_2 = \frac{\lg\delta}{\lg(A_1:\delta)}, \quad A_1\dot{A}_2 + 2A_2\dot{A}_1 = 0. \tag{18}$$

Интегрирование системы дает

$$\tau = 1 + 2a^2 + \frac{1-a^2}{2\lg\frac{1}{\delta}} - \frac{1}{\lg\frac{1}{\delta}}\left(A_1{}^2 + \frac{2a^2}{A_1{}^4}\right)\lg\frac{A_1}{\delta} +$$

$$+ \frac{1}{2\lg\frac{1}{\delta}}\left(A_1{}^2 - \frac{a^2}{A_1{}^2}\right), \quad A_2 = \frac{a}{A_1{}^2}. \tag{19}$$

Прежде чем контур области дойдет до скважины, наступит момент τ_1, в который на кардиоиде образуется точка возврата. Это будет при $A_1 = 2A_2 = (2a)^{1/3}$. После этого момента времени решение (19) не будет годиться, Аналогичные обстоятельства имеют место (см. [2]) для полинома любой степени. Причина, повидимому, лежит в том, что в уравнениях Дарси мы пренебрегаем инерционными членами, что не допустимо при больших скоростях.

4. Скважина в полуплоскости. Условие на контуре области может быть написано в виде

$$\frac{d\omega}{d\zeta}\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\zeta}} - \frac{m}{2}\left[\frac{d\omega}{d\zeta}\dot{f}(\zeta)\bar{f}'(\bar{\zeta}) + \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\zeta}}\dot{\bar{f}}(\bar{\zeta})f'(\zeta)\right] = 0 \tag{20}$$

или, так как на контуре $\zeta = \bar{\zeta} = \xi$, $\frac{d\bar{\omega}}{d\xi} = -\frac{d\omega}{d\xi}$,

$$\frac{d\omega}{d\xi} + \frac{m}{2}\left[\dot{f}(\xi)\bar{f}'(\xi) - \dot{\bar{f}}(\xi)f'(\xi)\right] = 0. \tag{21}$$

Для одной скважины

$$\omega = -\frac{q}{2\pi}\lg\frac{\zeta - \eta_0 i}{\zeta + \eta_0 i}.$$

Положив $z = f(\zeta) = \zeta + A(\zeta)t + B(\zeta)t^2 + C(\zeta)t^3 + \ldots$, найдем

$$A(\zeta) = -\frac{q_0}{\pi m}\frac{1}{\zeta + ci}, \quad B(\zeta) = -\frac{q_0{}^2(1+\varepsilon)}{4\pi^2 m^2 c}\frac{1}{\zeta + ci} - \frac{q_0{}^2 i}{2m^2\pi^2 c}\frac{1}{(\zeta + ci)^2},$$

$$C(\zeta) = -\frac{q_0{}^3(4 + 6\varepsilon + 3\varepsilon^2)}{24m^3\pi^3c^4}\frac{1}{\zeta + ci} - \frac{q_0{}^3(7 + 5\varepsilon)i}{24\pi^3m^3c^3}\frac{1}{(\zeta + ci)^2} - \frac{q_0{}^3}{12\pi^3m^3c^2}\frac{1}{(\zeta + ci)^3},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\lg(2c/\delta)}, \quad c = \eta_0|_{t=0}.$$

Аналогичным путем рассматриваются задачи о движении в вертикальной плоскости, когда учитывается влияние силы тяжести. Уравнение (3) будет тогда содержать член с первой степенью $\partial\varphi/\partial y$ и в уравнение (20) войдут добавочные члены.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
9 VII 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Нефтепромысловая механика, ч. II, 1934. [2] Л. А. Галин, ДАН, XLVII, № 4 (1945).