Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 4

ГИДРОДИНАМИКА

Л. А. ГАЛИН

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 VII 1944)

1. Случай невесомой жидкости. Если фильтрация происходит в горизонтальном пласте и сила тяжести направлена перпендикулярно к направлению движения, то жидкость можно считать невесомой. Этот случай имеет место при фильтрации нефти.

В начальный момент времени нефть занимает область между контурами $\Gamma(t_0)$ и Γ_2, давление на которых соответственно p_1 и p_2; Γ_2 — окружность малого радиуса δ (скважина). В момент времени t эта область будет находиться между контурами $\Gamma(t)$ и Γ_2, давления на которых также p_1 и p_2. (Давления постоянны в процессе фильтрации. Эта постановка задачи принадлежит акад. Л. С. Лейбензону [1].)

Функция, отображающая единичный круг $|\zeta|<1$ на односвязную область, ограниченную $\Gamma(t)$, будет $z(t, \zeta)$, причем $z(t, 0)=0$. Скорости фильтрации определяются на основании потенциала скоростей

$$v_x=\partial\varphi/\partial x, \qquad v_y=\partial\varphi/\partial y, \tag{1}$$

причем $\varphi=-\frac{k}{\rho g}p$.

Здесь k — коэффициент фильтрации, а ρ — плотность жидкости [2]. Комплексный потенциал в плоскости ζ

$$w(\zeta)=\frac{-(p_2-p_1)k}{\lg\delta_1\,\rho g}\lg\zeta-\frac{p_1 k}{\rho g}=\varphi^*+i\psi^*, \tag{2}$$

где $\delta_1=\delta\,|\partial\zeta/\partial z|_{\zeta=0}$ — радиус окружности, соответствующей в плоскости ζ контуру Γ_2.

Скорость перемещения точки единичного круга плоскости ζ

$$v=-\frac{k(p_2-p_1)}{m\rho g\lg\delta_1}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2_{\zeta=e^{i\vartheta}}. \tag{3}$$

Перемещение точки контура единичного круга за время dt

$$\varepsilon=-\frac{k(p_2-p_1)}{m\rho g\lg\delta_1}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2_{\zeta=e^{i\vartheta}}dt.$$

Здесь m — пористость среды. Через промежуток времени dt мы получаем в области ζ контур, близкий к кругу. Можно показать, что функция, отображающая область, ограниченную этим контуром, на круг:

$$\zeta_1(\zeta)=\zeta-\zeta \underset{\gamma}{S}\left[A\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2_{\zeta=e^{i\vartheta}}dt\right]. \tag{4}$$

Здесь $A = -\frac{k(p_2 - p_1)}{m\rho g \lg \delta_1}$, а $\underset{\gamma}{S}$ — символ Шварца для круга. Но тогда

$$z(t + dt, \zeta) = z(\zeta_1(\zeta)) = z\left(\zeta - \zeta \underset{\gamma}{S}\left[A \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|^2_{\zeta = e^{i\vartheta}} dt\right]\right),$$

а следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial \zeta} \zeta \underset{\gamma}{S}\left[A \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|_{\zeta = e^{i\vartheta}}\right].$$

Отсюда:

$$-\frac{\partial z}{\partial t} : \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \underset{\gamma}{S}\left[A \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|^2_{\zeta = e^{i\vartheta}}\right]. \tag{5}$$

Или, определяя действительную часть этого выражения на контуре единичного круга, будем иметь

$$\operatorname{Re}\left[-\frac{\partial z}{\partial t} : \zeta \frac{\partial z}{\partial}\right]_{\zeta = e^{i\vartheta}} = -\left(\frac{k(p_2 - p_1)}{\rho g m}\right) : \left[\lg \delta - \lg \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta = 0}\right] \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta = e^{i\vartheta}}.$$

Из этого следует

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta = e^{i\vartheta}} = \left(\frac{k(p_2 - p_1)}{\rho g m}\right) : \left[\lg \delta - \lg \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta = 0}\right]. \tag{6}$$

Это уравнение вместе с начальным условием $z(0, \zeta) = z_0(\zeta)$ определяет функцию $z(t, \zeta)$.

2. С л у ч а й т я ж е л о й ж и д к о с т и. При движении жидкости в вертикальной плоскости необходимо учитывать силу тяжести. Рассмотренная ниже задача соответствует случаю притока жидкости к дрене.

Вместо уравнения (1) будем здесь иметь ([2]):

$$\varphi^* = -k\left(\frac{p^*}{\rho g} + y\right). \tag{7}$$

Давление p — гармоническая функция, удовлетворяющая условиям, аналогичным тем, которым удовлетворяет φ^* в предыдущей задаче.

В таком случае, по аналогии с (3), получаем

$$-\left(\frac{\rho g}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \rho g \frac{\partial y}{\partial n}\right) = \frac{p_2 - p_1}{\lg \delta_1} : \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta = e^{i\vartheta}} \tag{8}$$

или перемещение точки контура единичного круга

$$\varepsilon_1 = -\frac{k}{m}\left\{\frac{p_2 - p_1}{\rho g \lg \delta_1} - \operatorname{Re}\left[i\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta = e^{i\vartheta}}\right\} dt : \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|^2_{\zeta = e^{i\vartheta}}.$$

Отсюда окончательно:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} - i \frac{k}{m} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta = e^{i\vartheta}} = \frac{k(p_2 - p_1)}{\rho g m} : \left(\lg \delta - \lg \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta = 0}\right). \tag{9}$$

Начальное условие $z(0, \zeta) = z_0(\zeta)$.

3. Р е ш е н и е з а д а ч и д л я с л у ч а я н е в е с о м о й ж и д к о с т и, к о г д а $z_0(\zeta)$ п о л и н о м. В уравнение (6) вводим новую переменную

$$\tau = \int_0^t \frac{k(p_2 - p_1)\, dt}{m\rho g} : \left(\lg \delta - \lg \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta = 0}\right). \tag{10}$$

Тогда получаем:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta = e^{i\vartheta}} = 1. \tag{11}$$

Если задача решена и определено

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = F(\tau),$$

то для определения τ получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{k(p_2 - p_1)}{m\rho g} : (\lg F(\tau) - \lg \delta).$$

Из уравнения (11) исключены все физические параметры, что значительно упрощает вычисления.

В случае, когда $z_0(\zeta)$ полином степени m, примем:

$$z(\tau, \zeta) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n(\tau)\zeta^n. \tag{12}$$

Подставляя в (11) и приравнивая к единице коэффициент при ζ^0 и нулю коэффициенты при ζ^n, где $n \neq 0$, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\alpha_1(\tau)\alpha_m'(\tau) + m\alpha_m(\tau)\alpha_1'(\tau) = 0,$$

$$2\alpha_2(\tau)\alpha_m'(\tau) + \alpha_1(\tau)\alpha_{m-1}'(\tau) + m\alpha_m(\tau)\alpha_2'(\tau) + (m-1)\alpha_{m-1}(\tau)\alpha_1'(\tau) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$m\alpha_m(\tau)\alpha_m'(\tau) + (m-1)\alpha_{m-1}(\tau)\alpha_{m-1}'(\tau) + \ldots + 3\alpha_3(\tau)\alpha_3'(\tau) + 2\alpha_2(\tau)\alpha_2'(\tau) + \\ + \alpha_1(\tau)\alpha_1'(\tau) = 1.$$

Разрешая их относительно производных, получим

$$\begin{aligned} \alpha_1'(\tau) &= A_1(\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \ldots, \alpha_m(\tau)), \\ \alpha_2'(\tau) &= A_2(\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \ldots, \alpha_m(\tau)), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m'(\tau) &= A_m(\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \ldots, \alpha_m(\tau)). \end{aligned} \tag{13}$$

Начальные условия:

$$\tau = 0 \quad \alpha_1(\tau) = \alpha_1^0, \quad \alpha_2(\tau) = \alpha_2^0, \ldots, \alpha_m(\tau) = \alpha_m^0.$$

Здесь $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — рациональные функции от $\alpha_n(t)$. Полученная система уравнений может быть решена обычными методами. Можно показать, что степень полинома (12) не может быть числом, большим m, так как это противоречило бы условию единственности решения системы дифференциальных уравнений в той области, где это заведомо должно иметь место [3].

В момент обводнения скважины $|z(t, \zeta)|_{\min} = 0$ и, следовательно

$$\frac{|z(t, \zeta)|_{\max}}{|z(t, \zeta)|_{\min}} = \infty. \tag{14}$$

Допустим, что в этот момент $z(t, \zeta)$ однолистна. Пусть $z(0, \zeta) = z_0(\zeta)$ является полиномом степени m и, следовательно,

$$z(t, \zeta) = \sum_{n=1}^{m} a_n(t)\zeta^n.$$

Тогда по теореме Литлвуда [4] $|a_n(t)| < en|a_1(t)|$, следовательно

$$|z(t, \zeta)|_{\max} < |a_1(t)|e\sum_{n=1}^{m} n = |a_1(t)|e\,\frac{m^2+m}{2}.$$

С другой стороны, по теореме Кёбе ([4])

$$|z(t, \zeta)|_{\min} > \frac{1}{4}|a_1(t)|.$$

В таком случае

$$\frac{|z(t, \zeta)|_{\max}}{|z(t, \zeta)|_{\min}} < 2e(m^2 + m),$$

что противоречит условию (14). Таким образом в момент обводнения $z(t, \zeta)$ не может быть однолистной. Но $z(0, \zeta) = z_0(\zeta)$ однолистна. Следовательно, потеря однолистности, при которой на контуре области течения образуется точка возврата, происходит до начала обводнения скважины. До этого момента образования точки возврата будет справедливо полученное решение.

Функция, удовлетворяющая уравнению (5) (а также функция, удовлетворяющая уравнению (9)) и условиям $z(0, \zeta) = z_0(\zeta)$, может быть также найдена в форме:

$$z(t, \zeta) = z_0(\zeta) + z_1(\zeta)t + z_2(\zeta)t^2 + \ldots$$

Подставляя (15) в (5) и беря время $t = 0$, получаем выражение для $z_1(\zeta)$, определенное через $z_0(\zeta)$.

Подставляя значения $z_0(\zeta)$ и $z_1(\zeta)$ в (5), продифференцированное по t, и беря время $t = 0$, получаем значение для $z_2(\zeta)$, выраженное через $z_0(\zeta)$ и $z_1(\zeta)$, и т. д. Можно показать, что в случае, когда $z_0(\zeta)$ рациональная функция, все $z_n(\zeta)$ также рациональные функции ζ.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
9 VII 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Нефтепромысловая механика, ч. II, 1934. [2] С. А. Христианович, С. Г. Михлин и Б. Б. Девисон, Некоторые новые задачи механики сплошной среды, 1938. [3] Д. Биркгоф, Динамические системы, 1941. [4] Г. М. Голузин, Усп. математ. наук, вып. VI (1939).