Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. ПОНТРЯГИН, член-корреспондент АН СССР

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

В своих работах ([1], [2]) Whitney ввел понятие расслоенного пространства (Fibre-bundle) и исследовал его, главным образом в случае, когда слоями являются сферы. Моя работа ([3]) трактует по существу тот же объект, но для частного случая касательных к ориентируемому многообразию. Мои методы сильнее методов Whitney в том смысле, что мною построено больше характеристических циклов, чем это сделано Whitney. В настоящей заметке я показываю, что данные мною методы применимы не только к частному случаю касательных, но и к общему случаю.

Следующие ниже определения 1 и 2 принадлежат Whitney, я сопровождаю их некоторыми дополнительными замечаниями.

Определение 1. Пусть A — топологическое пространство с заданной в нем топологической группой гомеоморфизмов Γ, B — комплекс, составленный из симплексов $T_1, T_2, \ldots$, и P — топологическое пространство. Мы будем говорить, что P есть расслоенное пространство или косое произведение A на B, $P=P(A, B)$, если выполнены следующие условия:

1) Каждой точке $y \in B$ соответствует некоторое подмножество $A_y \subset P$, причем различным точкам y и z из B соответствуют непересекающиеся подмножества A_y и A_z.

2) Каждому симплексу T_α поставлено в соответствие некоторое гомеоморфное отображение ξ_α топологического произведения $A \cdot T_\alpha$, т. е. определена функция $\xi_\alpha(x, y)=\xi_{\alpha y}(x)$, $x \in A$, $y \in T_\alpha$, причем $\xi_{\alpha y}$ есть гомеоморфное отображение пространства A на A_y.

3) Если $y \in T_\alpha \cap T_\beta$, то $\xi_{\alpha y}^{-1}\xi_{\beta y}=\eta_{\alpha\beta y} \in \Gamma$, и $\eta_{\alpha\beta y}$ дает непрерывное отображение $T_\alpha \cap T_\beta$ в группу Γ.

Очевидно, что если $y \in T_\alpha \cap T_\beta \cap T_\gamma$, то

$$\eta_{\alpha\beta y}\,\eta_{\beta\gamma y}=\eta_{\alpha\gamma y}. \tag{1}$$

Предположим, что все симплексы $T_1, T_2, \ldots$ ориентированы, и обозначим через $\varepsilon_{\alpha\beta}$ тот коэффициент, с которым симплекс T_β входит в границу симплекса T_α. Если $\varepsilon_{\alpha\beta} \neq 0$, то положим $\eta_{\alpha\beta y}=\zeta_{\alpha\beta y}$. Пусть $\varepsilon_{\alpha\beta} \neq 0$, $\varepsilon_{\alpha\gamma} \neq 0$, $\varepsilon_{\beta\delta} \neq 0$, $\varepsilon_{\gamma\delta} \neq 0$; тогда из (1) для $y \in T_\delta$ следует:

$$\zeta_{\alpha\beta y}\zeta_{\beta\delta y}=\zeta_{\alpha\gamma y}\zeta_{\gamma\delta y}. \tag{2}$$

Если положить $\Delta_\Gamma T_\alpha=\sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta y}T_\beta$, то соотношение (2) записывается в форме:

$$\Delta_\Gamma\Delta_\Gamma T_\alpha=0.$$

Легко проверяется, что по заданным $\zeta_{\alpha\beta y}$, удовлетворяющим соотношениям (2), однозначно определяются $\eta_{\alpha\beta y}$, удовлетворяющие соотношениям (1). Легко доказывается следующее предложение существования:

А. Пусть A — топологическое пространство с заданной в нем топологической группой гомеоморфизмов Γ, B — комплекс, составленный из симплексов $T_1, T_2, \ldots$, причем $\Delta T_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} T_\beta$, и $\zeta_{\alpha\beta y} \in \Gamma$, $y \in T_\beta$ система непрерывных функций, определенная для тех α, β, для которых $\varepsilon_{\alpha\beta} \neq 0$, удовлетворяющих соотношениям (2). Существует тогда косое произведение $P(A, B)$, для которого $\xi_{\alpha y}^{-1} \xi_{\beta y} = \zeta_{\alpha\beta y}$.

Определение 2. Пусть $P(A, B)$ и $P' = P'(A, B)$ два косых произведения с одинаковой группой Γ. Гомеоморфное отображение f пространства P' на пространство P будем называть изоморфным отображением косого произведения $P'(A, B)$ на косое произведение $P(A, B)$, если $f(A'_y) = A_y$ и при $y \in T_\alpha$ имеем $\xi_{\alpha y}^{-1} f \xi'_{\alpha y} = \tau_{\alpha y} \in \Gamma$.

Из последнего непосредственно вытекает: для $y \in T_\beta$

$$\zeta_{\alpha\beta y} = \tau_{\alpha y}^{-1} \zeta'_{\alpha\beta y} \tau_{\beta y}. \tag{3}$$

Легко доказывается следующее предложение.

В. Два косых произведения $P(A, B)$ и $P'(A, B)$ с определяющими функциями $\zeta_{\alpha\beta y}$ и $\zeta'_{\alpha\beta y}$ тогда и только тогда изоморфны, когда существуют непрерывные функции $\tau_{\alpha y} \in \Gamma$, $y \in T_\alpha$, удовлетворяющие условиям (3).

Whitney отметил, что если $P(A, B)$ есть косое произведение, а f — непрерывное отображение некоторого комплекса C в B, то возникает косое произведение $P(A, C, f)$ A на C с той же группой Γ, что и исходное произведение $P(A, B)$, причем $P(A, C, f)$ определено однозначно с точностью до изоморфизма. Легко доказывается, что если два отображения f и g эквивалентны, то произведения $P(A, C, f)$ и $P(A, C, g)$ изоморфны. Оказывается, однако, что из изоморфизма произведений $P(A, C, f)$ и $P(A, C, g)$ часто следует эквивалентность отображений f и g. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 3. Косое произведение $P(A, B)$ с группой Γ будем называть n-мерно универсальным для пространства A с группой Γ, если выполнены следующие условия:

1) Косое произведение $P(A, C)$ с группой Γ, где C имеет размерность не выше n, всегда изоморфно $P(A, C, f)$, где f — непрерывное отображение C в B.

2) Два косых произведения $P(A, C, f)$ и $P(A, C, g)$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения f и g комплекса C в B эквивалентны.

Определение 4. Сохраняя обозначения определения 3, предположим, что B есть b-мерное ориентированное многообразие и обозначим через z некоторый $(b - r)$-мерный цикл из B. Пусть f — непрерывное отображение C в B и T — некоторый r-мерный ориентированный симплекс из C. Индекс пересечения $f(T)$ с z обозначим через $u_z^r(T)$. Легко доказывается, что u_z^r есть r-мерный ∇-цикл из C, класс гомологий которого однозначно определен классом гомологий цикла z и классом отображения f. Таким образом, в силу универсальности $P(A, B)$, ∇-цикл u_z^r есть инвариант косого произведения $P(A, C, f)$. u_z^r будем называть характеристическим циклом косого произведения $P(A, C, f)$

Пусть $H_l = H(k, l)$ — многообразие всех k-мерных ориентированных плоскостей $(k + l)$-мерного евклидова пространства R^{k+l}, проходящих через начало координат в R^{k+l}. За A примем некоторое k-мерное ориентированное евклидово пространство R^k, а за группу Γ — группу всех изометрических отображений R^k на себя, сохраняющих начало координат и ориентацию в R^k. Косое произведение $P\ (R^k, H_l)$ определим, приняв за точку пространства P пару (R_y^k, x), где $R_y^k \in H_l$, а $x \in R_y^k$; тогда слоем A_y будет служить множество всех пар (R_y^k, x) с фиксированным R_y^k. Whitney отметил, что $P(R^k, H_2)$ удовлетворяет условию 1) определения 3 при $l=n$. В теореме 1 я даю другое доказательство этого предложения, одновременно доказывая универсальность $P(R^k, H_2)$.

Теорема 1. *Косое произведение $P(R^k, H_2)$ является $(l-1)$-мерно универсальным для пространства R^k с группой вращений* Г.

Доказательство. Покажем, что $P(R^k, H_2)$ универсально при достаточно большом l, снижение размерности не представляет затруднений. Пусть C — комплекс, составленный из симплексов $T_1, T_2, \ldots$, и C^r — подкомплекс комплекса C, составленный из всех симплексов размерности не выше r. Пусть $P(R^k, C)$ некоторое косое произведение с определяющими функциями $\zeta_{\alpha\beta y} \in \Gamma$, $y \in T_\beta$ (см. А). Будем строить непрерывное отображение f комплекса C в H_l такое, чтобы $P(R^k, C, f)$ было изоморфно $P(R^k, C)$, $f(y) = \overline{R}_y^k \in H_l$. Одновременно будем строить изометрическое отображение $\overline{\xi}_{\alpha y}$, $y \in T_\alpha$ пространства R^k на пространство $\overline{R}_y^k$ так, чтобы $\overline{\xi}_{\alpha y}^{-1}\ \overline{\xi}_{\beta y} = \zeta_{\alpha\beta y}$. Допустим, что f и $\overline{\xi}_{\alpha y}$ построены для C^r, $f(y) = \overline{R}_y^k \subset R^{k+l}$ при $y \in C^r$. Будем считать, что $R^{k+l} \subset R^{2k+l}$ и $\overline{R}^k$ есть ортогональное дополнение R^{k+l} в R^{2k+l}. Пусть T_α произвольный $(r+1)$-мерный симплекс из C с центром p. Положим $f(p) = \overline{R}^k$ и произвольным образом определим изометрическое отображение $\overline{\xi}_{\alpha p}$ пространства R^k на $\overline{R}^k$. Пусть S_α — граница симплекса T_α, тогда положение точки $z \in T_\alpha$ в симплексе T_α можно определить парой (y, t), где $y \in S_\alpha$, а t — действительный параметр $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, причем $(y, 0) = p$, $(y, \pi/2) = y$, $z = (y, t)$. Пусть T_β — произвольная r-мерная грань симплекса T_α, тогда $\overline{\xi}_{\beta y}$ определено. Функцию $\overline{\xi}_{\alpha z}$, $z = (y, t)$, $y \in T_\beta$, определим, положив

$$\overline{\xi}_{\alpha z}(x) = \overline{\xi}_{\alpha p}(x) \cos(t) + \overline{\xi}_{\beta y}(\zeta_{\alpha\beta y}^{-1}(x)) \sin(t), \quad x \in R^k. \tag{4}$$

Функцию f определим, положив

$$f(z) = \overline{\xi}_{\beta z}(R^k). \tag{5}$$

Если y одновременно принадлежит к двум r-мерным граням T_β и T_γ симплекса T_α, то полагая $T_\delta = T_\beta \cap T_\gamma$, мы на основании (2) убеждаемся в том, что соотношение (4) одинаково определяет отображение $\overline{\xi}_{\alpha z}$ независимо от того, используем мы T_β или T_γ.

Пусть теперь f и g два непрерывных отображения C в H_l такие, что произведения $P(R^k, C, f)$ и $P(R^k, C, g)$ изоморфны; это значит, что существует изометрическое отображение h_y плоскости $f(y)$ на плоскость $g(y)$, непрерывно зависящее от $y \in C$. Пусть $R^{k+l} \subset R^{2k+2l}$, $\overline{R}^{k+l}$ — ортогональное дополнение R^{k+l} в R^{2k+2l} и φ — некоторое изометрическое отображение R^{k+l} на $\overline{R}^{k+l}$. Тогда φg есть некоторое отображение C в H_{k+2l}, изотопное g, ибо φ можно осуществить непрерывным вращением R^{k+l} в R^{2k+2l}. При $x \in f(y)$ положим:

$$\psi_{yt}(x) = \varphi(h_y(x)) \cos(t) + x \sin(t), \qquad \psi_t(y) = \psi_{ty}(f(y)). \tag{6}$$

Очевидно, что $\psi_t(y)$ есть k-мерная плоскость в R^{2k+2l}, и потому ψ_t есть отображение C в H_{k+2l}. Мы имеем из (6) $\varphi_0 = \varphi g$, $\psi_{\pi/2} = f$, а так как g и φg эквивалентны, то f и g эквивалентны в H_{k+2l}. Итак, теорема 1 доказана.

Гомологии в многообразии $H(k, l)$ достаточно изучены в моей работе ([3]). Для изучения гомотопических свойств $H(k, l)$ полезна:

Теорема 2. *При $n \leqslant l-1$ n-мерная гомотопическая группа многообразия $H(k, l)$ изоморфна $(n-1)$-мерной гомотопической группе* *многообразия* Γ_k, *где* Γ_k *есть группа положительных вращений* k*-мерного евклидова пространства*.

Доказательство. Так же как в теореме 1, будем вести доказательство для достаточно большого l. Пусть R_0^k и R_1^k — два взаимно ортогональных k-мерных подпространства из R^{k+l}. Будем считать, что группа Γ_k действует в R_1^k и обозначим через φ некоторое изометрическое отображение R_1^k на R_0^k. Пусть S^{n-1}—ориентированная $(n-1)$-мерная сфера и ψ_y— элемент группы Γ_k, непрерывно зависящий от $y \in S^{n-1}$. При $x \in R_1^k$ положим

$$\theta(x, y, t) = \varphi(x)\cos(t) + \psi_y(x)\sin(t); \qquad \theta(y, t) = \theta(R_1^k, y, t). \tag{7}$$

Очевидно, что $\theta(y, t)$ есть k-мерная плоскость в R^{k+l}, при этом $\theta(y, 0) = R_0^k$, $\theta(y, \pi/2) = R_1^k$. Таким образом $\theta(y, t)$ дает непрерывное отображение прямого произведения $S^{n-1} \cdot T$ в H_l, где T есть отрезок $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. При этом отображении оба основания $S^{n-1} \cdot 0$ и $S^{n-1} \cdot \pi/2$ цилиндра $S^{n-1} \cdot T$ переходят в точки и, следовательно, мы имеем непрерывное отображение сферы S^n в H_l. Оказывается, что так установленное соответствие между отображением S^{n-1} в Γ_k и отображением S^n в H_l дает изоморфизм соответствующих групп гомотопий. Доказательство проводится примерно так же, как в теореме 1.

Следует отметить, что построение универсальных косых произведений легко может быть проведено для любой компактной группы Ли Γ, так что $P(R^k, H_2)$ отнюдь не является исключением.

Поступило
9 II 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Whitney, Bull. Am. Math. Soc., **43**, 785 (1937). [2] H. Whitney, Proc. Nation. Acad., **26**, 148 (1940). [3] Л. Понтрягин, ДАН, XXXV, № 2 (1942).