Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ, член-корреспондент АН СССР

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1°. Известно, что непрерывная функция $f(z)$, определенная на жордановой линии C без кратных точек, начинающейся и оканчивающейся в бесконечности, может быть приближена целой функцией $G(z)$ так, чтобы на линии C

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon(|z|),$$

где $\varepsilon(t)$ — произвольная положительная функция, имеющая отличную от нуля нижнюю грань в каждом конечном интервале и убывающая как угодно быстро при $t\to\infty$. Этот результат был установлен Карлеманом для случая спрямляемой жордановой линии ([1]) и переносится на произвольную жорданову линию ([2]). В настоящей заметке рассматривается приближение целыми функциями голоморфных функций в областях с бесконечно удаленной граничной точкой и устанавливается ряд теорем о возможном порядке убывания уклонения при $|z|\to\infty$, а также ряд теорем о росте приближающей целой функции.

2°. Рассматривая приближение целыми функциями функций, голоморфных в областях с жордановой границей, непрерывных вплоть до контура, можно установить следующие предложения.

Теорема 1. *Пусть C — кривая Жордана без кратных точек, начинающаяся и оканчивающаяся в бесконечности, D — область, ограниченная линией C; $f(z)$ — голоморфная в области D функция, непрерывная на $D+C$ (исключая бесконечно удаленную точку). Каковы бы ни были положительные ε и η, существует целая функция $G(z)$, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon e^{-|z|^{1/2-\eta}} \tag{1}$$

в замкнутой области $\overline{D}$. При этом существует область рассматриваемого типа и голоморфная в ней функция $f(z)$, при которых теорема не имеет места, если правую часть неравенства (1) *заменить любой убывающей функцией $\psi(|z|)$, для которой*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log\psi(t)}{t^{1/2}}=-\infty,$$

а также при $\psi(t)=e^{-at^{1/2}}$, $a>0$.

В различных частных классах областей можно осуществить приближение целой функцией так, чтобы уклонение более быстро убывало на бесконечности.

Теорема 2. *Если область типа, рассмотренного в теореме 1, лежит внутри угла $|\arg z|\leqslant\alpha/2$, $f(z)$ — голоморфная в D функция, непрерывная на $D+C$ (исключая бесконечную точку), то при любых* *положительных* ε *и* η *можно построить целую функцию* $G(z)$, *удовлетворяющую неравенству*

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon e^{-|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}\eta}. \tag{2}$$

Для функций, определенных в угле, теорема не имеет места, если правую часть неравенства заменить убывающей функцией, для которой

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log\psi(t)}{t^{\pi/\alpha}}=-\infty,$$

а также при $\psi(t)=e^{-at^{\pi/\alpha}}$, $a>0$.

Теорема 3. *Пусть* D — *область, лежащая в полосе* $|y|\leqslant\pi/2$, *ограниченная линиями Жордана, идущими из* $-\infty$ *в* $+\infty$, $f(z)$ *голоморфна в* D *и непрерывна на* $D+C$ *(за исключением бесконечно удаленных точек). При любых* ε *и* η *можно построить целую функцию, удовлетворяющую неравенству*

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon e^{-e^{(1-\eta)|z|}}, \tag{3}$$

причем для функций, определенных в полосе, теорема не имеет места, если правую часть неравенства заменить убывающей функцией, для которой

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log\psi(t)}{e^{t}}=-\infty,$$

а также при $\psi(t)=e^{-ae^{t}}$, $a>0$.

3°. Для функций, аналитических в замкнутых областях (исключая бесконечную точку), можно в ряде случаев установить, как можно ограничить рост приближающей функции в зависимости от роста голоморфной функции $f(z)$ и быстроты убывания уклонения. Мы будем обозначать через $M(r)$ максимум модуля функции $f(z)$ в точках области D, лежащих внутри круга $|z|\leqslant r$, и через $\mathfrak{M}(r)$ максимум модуля целой функции в круге $|z|\leqslant r$. Тогда имеют место следующие предложения.

Теорема 4. *Пусть* $f(z)$ *голоморфна в угле* $|\arg z|\leqslant\alpha/2$, *число* ρ *удовлетворяет неравенству* $0\leqslant\rho\leqslant\pi/\alpha$ *и* ε *и* δ — *произвольные положительные числа. Существует целая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon e^{-|z|^{\rho}} \tag{4}$$

в угле $|\arg z|\leqslant\frac{\alpha}{2}-\delta$, *максимум модуля которой удовлетворяет неравенству*

$$\log\mathfrak{M}(r)<(1+r)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}\left[K+k\max_{t\leqslant kr+1}\frac{t^{\rho}+\log^{+}M(t)}{(1+t)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}\right],$$

где k — *константа, зависящая от* δ, *а* K — *константа, зависящая от* ε *и* δ. *Можно построить также целую функцию, удовлетворяющую неравенству* (4), *рост которой ограничен неравенством*

$$\log\mathfrak{M}(r)<(r+\delta)^{\varkappa}\,[K+k(r+\delta)^{\rho}+k\log^{+}M(r+\delta)],$$

где $\varkappa$ *большее из чисел* $2,\frac{\pi}{2\pi-\alpha}$.

Отметим одно следствие этой теоремы: если в угле $|\arg z|\leqslant\alpha/2$ функция $f(z)$ такова, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}=\nu, \tag{5}$$

то при $0 \leqslant \rho \leqslant \pi/\alpha$ можно построить целую функцию, удовлетворяющую в угле $|\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2} - \delta$ неравенству (4), порядок которой не превышает большего из чисел ν, ρ, $\frac{\pi}{2\pi - \alpha}$, причем указанная граница для порядка не может быть понижена.

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ голоморфна в полосе $|y| \leqslant \pi/2$, ε и δ — произвольные положительные числа. Существует целая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon e^{-|z|}, \tag{6}$$

такая, что

$$\log \mathfrak{M}(r) < (1 + r(\log^+ r)^2)\,[K + k \log^+ r + k (r \log^+ r)^\rho + \\ + k \log^+ M(kr \log^+ r + k)],$$

где k — константа, зависящая от ε, а K — от ε и δ. Можно также построить целую функцию, удовлетворяющую (6), *так, что ее рост ограничен неравенством*

$$\log \mathfrak{M}(r) < (r + \delta)^2\,[K + k(r + \delta)^2 + k \log^+ M(r + \delta)].$$

Из этой теоремы вытекает следующее следствие: если голоморфная в полосе $|y| \leqslant \pi/2$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию (5), то существует целая функция, удовлетворяющая неравенству (6), порядок которой не выше большего из чисел $\rho + 1$, $\nu + 1$. Указанная граница для порядка не может быть понижена.

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ голоморфна в полосе $|y| \leqslant \pi/2$, ε и δ — произвольные положительные числа. Существует целая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon e^{-e^{|z|}}$$

в полосе $|y| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, рост которой ограничен неравенством

$$\log \mathfrak{M}(r) < K\,[e^{(1+\delta)r} + (r + \delta)^2 \log^+ M(r + \delta)].$$

4°. Если $f(x)$ функция действительного переменного, имеющая первую производную, то можно дать оценки роста приближающей целой функции в зависимости от роста ее производной и убывания уклонения на бесконечности. Мы отметим здесь только один частный результат.

Теорема 7. *Пусть $f(x)$ определена при $-\infty < x < +\infty$ и $\mu(t)$ — максимум $|f'(x)|$ при $|x| < t$. Если*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\log \mu(t)}{\log t} = \nu,$$

то существует целая функция порядка не выше $\nu + 1$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(x) - G(x)| < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число. Указанный порядок роста $G(x)$ не может быть понижен.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
11 I 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fisik, 20 B, No. 4 (1927).
[2] М. Келдыш и М. Лаврентьев, ДАН, XXIII, № 8 (1939).