Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА НА КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 X 1944)

1. Нашей целью является дать соответствующие оценки сверху для площади геодезического многоугольника со сторонами данной длины и для площади области, ограниченной кривой данной длины, на любых поверхностях с ограниченной гауссовой кривизной; оценки в зависимости от верхней границы гауссовой кривизны в многоугольнике или в области, ограниченной рассматриваемой кривой. Стоит заметить, что на поверхности с ограниченной кривизной среди геодезических многоугольников со сторонами данной длины, так же как среди областей, ограниченных кривыми данной длины, может не существовать таких, которые имеют наибольшую площадь. Наши теоремы 1 и 3 показывают, что так будет, например, на гиперболическом параболоиде.

Для того чтобы формулировать наши результаты, условимся о терминологии. Областью мы будем называть гомеоморфную кругу замкнутую область, в которой введены параметры u, v и задан линейный элемент $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 (EG - F^2 > 0)$ с коэффициентами, непрерывными вместе с их первыми производными во всей замкнутой области. При этом предполагается, что граница области имеет конечную длину — «периметр области». Длины, углы и площади определяются при помощи данного линейного элемента. (Является ли область частью поверхности в пространстве или нет — не имеет никакого значения.) Многоугольником мы называем область, граница которой состоит из конечного числа геодезических дуг. Мы говорим, что в области D кривизна меньше или равна k ($\geqslant k$, $= k$), если для всякого геодезического треугольника, лежащего в D, отношение его сферического избытка $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ к площади меньше или равно k ($\geqslant k$, $= k$). Плоскостью Лобачевского мы называем плоскость, на которой имеет место геометрия Лобачевского; она вполне определяется ее кривизной. Евклидову плоскость мы считаем частным случаем плоскости Лобачевского.

Теорема 1. *Если в многоугольнике P кривизна не превосходит $k \leqslant 0$, то площадь многоугольника P не больше площади многоугольника P_0, имеющего стороны той же длины, что P, и вписуемого в кривую постоянной кривизны на плоскости Лобачевского, имеющей кривизну k. И если площадь P равна площади P_0, то P изометричен P_0.*

Теорема 2. *Если в многоугольнике P кривизна не превосходит $k > 0$ и если* a) *периметр $P \leqslant 2\pi\sqrt{k}$* и b) *никакие две точки многоугольника P нельзя соединить двумя геодезическими, то площадь многоугольника P не больше площади многоугольника P_0, имеющего стороны той же длины и вписуемого в круг на полусфере, имеющей* *кривизну k (многоугольник P_0 существует в силу условия* a). *И если площадь P равна площади P_0, то P изометричен P_0.*

Теорема 3. *Если в области D кривизна не превосходит $k \leqslant 0$, то площадь области D не больше площади круга D_0, имеющего тот же периметр и лежащего на плоскости Лобачевского кривизны k. И если площадь D равна площади D_0, то D изометрична D_0.*

Теорема 4. *Если в области D кривизна не превосходит $k > 0$ и если:* a) *периметр $D \leqslant 2\pi / \sqrt{k}$ и* b) *никакие две точки из D нельзя соединить двумя геодезическими, то площадь области D не больше площади круга D_0, имеющего тот же периметр и лежащего на полусфере кривизны k. И если площадь D равна площади D_0, то D изометрична D_0.*

Дополнительные условия a) и b), появляющиеся в теоремах 2 и 4, существенны. Именно, если периметр области $D > 2\pi / \sqrt{k}$, то круг D_0 не существует. И можно указать поверхности с кривизной меньшей k $(k > 0)$, на которых существуют области со сколь угодно малым периметром, но со сколь угодно большой площадью; такие области не удовлетворяют, конечно, условию b).

2. Изложим в общих чертах доказательство теоремы 1.

Из вариационного исчисления известно, что область, ограниченная на плоскости Лобачевского данным прямолинейным отрезком и кривой данной длины, имеет наибольшую площадь тогда и только тогда, когда кривая имеет постоянную кривизну. Отсюда путем известного простого рассуждения следует:

Лемма А. Среди всех многоугольников с данными сторонами и с постоянной внутри них кривизной $k \leqslant 0$ наибольшую площадь имеет многоугольник, вписуемый в кривую постоянной кривизны на плоскости Лобачевского кривизны k.

Благодаря этой лемме нам достаточно доказать:

Лемма В. Если в многоугольнике P кривизна не превосходит $k \leqslant 0$, но не равна k всюду в P, то существует многоугольник с кривизной, всюду равной k, имеющий стороны той же длины, что P, и площадь бóльшую, чем P.

Лемма В получается в свою очередь как следствие ряда лемм.

Лемма 1. Пусть на плоскости Лобачевского даны треугольник ABC и два треугольника $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, стороны которых связаны со сторонами треугольника ABC равенствами: $A_1B_1 = AB$, $A_2C_2 = AC$, $B_1D_1 + D_2C_2 = BC$. Тогда, если сумма углов $\widehat{D}_1$ и $\widehat{D}_2$ в треугольниках $A_1B_1D_1$ и $A_2B_2D_2$ больше $180°$, то сумма площадей треугольников $A_1B_1D_1$, $A_2C_2D_2$ меньше площади треугольника ABC.

Доказательство. Наложив треугольники $A_1B_1D_1$, $A_2C_2D_2$ на треугольник ABC так, чтобы стороны A_1B_1 и A_2C_2 совпали с AB и AC, легко убедиться, что треугольники $A_1B_1D_1$, $A_2C_2D_2$ окажутся заключенными в треугольнике ABC.

Лемма 2. Если в треугольнике T кривизна не превосходит $k \leqslant 0$, то углы этого треугольника не больше, чем соответствующие углы треугольника T_0 со сторонами той же длины на плоскости Лобачевского кривизны k. И если хотя бы один угол треугольника T равен соответствующему углу треугольника T_0, то треугольники T и T_0 изометричны. (Далее треугольник T_0 будет называться «соответствующим T».)

Эта лемма известна для того случая, когда в треугольнике T имеется непрерывная гауссова кривизна ([1]). При наших более общих предположениях доказательство проводится аналогично.

Лемма 3. Если в треугольнике $T = ABC$ кривизна не превосходит $k \leqslant 0$, то площадь треугольника T не больше площади соответствующего треугольника T_0. И если площади T и T_0 равны, то T и T_0

изометричны. (Эта лемма есть теорема 1 для того частного случая, когда многоугольник P — треугольник).

Доказательство. Проводя в треугольнике ABC медиану AD, разобьем его на два треугольника: T^1 и T^2. Построим на плоскости Лобачевского кривизны k треугольники $T_0^1 = A^1B^1D^1$, $T_0^2 = A^2B^2D^2$, соответствующие T^1 и T^2.

По лемме 2 при переходе от треугольников T^1 и T^2 к треугольникам T_0^1 и T_0^2 углы не уменьшаются. Поэтому сумма углов $\widehat{D}_0^1$ и $\widehat{D}_0^2$ в этих треугольниках будет не меньше $180°$ и будет равна $180°$ только в том случае, если всюду в T кривизна равна k. В последнем случае треугольники T и T_0 изометричны, и поэтому этот случай мы можем исключить. А тогда из леммы 1 следует, что сумма площадей треугольников T_0^1 и T_0^2 меньше площади треугольника T_0:

$$S(T_0) > S(T_0^1) + S(T_0^2), \tag{1}$$

где S обозначает площадь.

Проведя теперь в треугольниках T^1 и T^2 по медиане, разобьем каждый из них на два : T^{11}, T^{12} и T^{21}, T^{22}. Тогда, аналогично (1), мы будем иметь

$$S(T_0^1) \geqslant S(T_0^{11}) + S(T_0^{12}), \quad S(T_0^2) \geqslant S(T_0^{21}) + S(T_0^{22}), \tag{2}$$

где $T_0^{11}, \ldots, T_0^{22}$ суть треугольники, соответствующие $T^{11}, \ldots, T^{22}$.

Из (1) и (2) следует

$$S(T_0) > S(T_0^{11}) + \ldots + S(T_0^{22}). \tag{3}$$

Продолжая этот процесс, мы можем притти к разбиению треугольника T на сколь угодно малые треугольники $T^{1\cdots1}, \ldots, T^{2\cdots2}$.

При этом, аналогично (3),

$$S(T_0) > S(T_0^{1\cdots1}) + \ldots + S(T_0^{2\cdots2}). \tag{4}$$

Но если треугольники $T^{1\cdots1}, \ldots, T^{2\cdots2}$ достаточно малы, то сумма их площадей будет сколь угодно мало отличаться от площади треугольника T. Поэтому из (4) следует, что $S(T_0) > S(T)$.

Докажем теперь лемму B. Пусть в многоугольнике P кривизна не превосходит $k \leqslant 0$. Разобьем P диагоналями на треугольники T^i и заменим эти треугольники соответствующими треугольниками T_0^i. Из треугольников T_0^i составится многоугольник P_0, в котором кривизна будет равна k и, согласно лемме 3, его площадь будет больше площади треугольника P, за исключением того случая, когда кривизна в P всюду равна k. Лемма B доказана, и тем самым доказана теорема 1.

Доказательство теоремы 2 проходит буквально так же, потому что условия a) и b) этой теоремы (их следует ввести также в леммы B, 2 и 4) позволяют все построения, проведенные на плоскости Лобачевского, производить на соответствующей полусфере.

3. Наметим теперь доказательство теоремы 3.

Из теоремы 1, путем предельного перехода от многоугольников к любым областям, легко заключить, что если в области D кривизна не превосходит $k \leqslant 0$, то площадь области D не превосходит площади соответствующего круга D_0 на плоскости Лобачевского. Остается поэтому доказать, что если площади D и D_0 равны, то D изометрична D_0. А из известного максимального свойства круга следует, что для этого достаточно показать, что если площади D и D_0 равны, то кривизна в D равна k.

Допустим, что кривизна в D не равна k. Тогда в D есть треугольник T, в котором кривизна не равна k. Если T_0 треугольник, соответствующий T, то

$$\sigma = S(T_0) - S(T) > 0. \tag{5}$$

Построим в D многоугольник P, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $S(D) - S(P) < \sigma/2.$ (6)

2) Если D_1 есть круг на плоскости Лобачевского кривизны k с периметром, равным периметру P, то

$$S(D_1) - S(D_0) < \sigma/2. \tag{7}$$

Это условие будет выполнено, как только периметр P (и тем самым D_1) будет достаточно близок к периметру D (и тем самым D_0).

3) P содержит треугольник T.

Разбив многоугольник $P - T$ диагоналями на треугольники, мы получим разбиение всего многоугольника P на треугольники. Заменив каждый из треугольников, на которые разбит P, соответствующим треугольником, мы получим комплекс треугольников, который обозначим P_1.

Площади всех треугольников из P_1 не меньше площадей треугольников из P; кроме того, среди этих треугольников есть соответствующие друг другу T и T_0, поэтому

$$S(P_1) - S(P) \geqslant \sigma. \tag{8}$$

В силу (6) отсюда следует, что

$$S(P_1) - S(D) > \sigma/2. \tag{9}$$

Покажем теперь, что $S(P_1) \leqslant S(D_1)$.

По лемме 2 при замене треугольников соответствующими углы не уменьшаются. Поэтому сумма углов вокруг каждой вершины треугольника T_0, т. е. каждой внутренней вершины комплекса P_1, будет больше 2π. Мы удлиним на одно и то же ε все стороны, сходящиеся в одной из этих вершин A. При этом площади треугольников, сходящихся в A, увеличатся, а углы, сходящиеся в A, уменьшатся. Отсюда ясно, что, увеличивая площадь и не меняя периметра, мы можем комплекс P_1 заменить таким, в котором вокруг всех внутренних вершин сумма углов равна 2π. Это будет многоугольник P_0, в котором кривизна всюду равна k. Площадь его больше площади P_1 (или равна ей, если вокруг всех внутренних вершин P_1 сумма углов была равна 2π), т. е. $S(P_1) \leqslant S(P_0)$. Но раз в P_0 кривизна равна k, то площадь P_0 не больше площади круга с тем же периметром, т. е. $S(P_0) \leqslant S(D_1)$.

Следовательно,

$$S(P_1) \leqslant S(D_1). \tag{10}$$

Отсюда на основании (9) следует, что $S(D_1) - S(D) > \sigma/2$, а применяя (7), мы получаем, что

$$S(D_0) > S(D),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4 доказывается точно так же.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
9 X 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Картан, Геометрия римановых пространств, прибавление III, п. 8. М.-Л., 1936.