Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П. Е. КРАСНУШКИН

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПРИМЕНЕНИИ К ПЛОСКО-СЛОИСТЫМ СРЕДАМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 III 1947)

1. Постановка задачи и метод. В этой работе будут рассмотрены волновые процессы, возникающие под действием заданных токов плотности J в неограниченной, изотропной, немагнитной, идеальной среде, диэлектрическая постоянная ε которой зависит только от одной декартовой координаты z. Введем цилиндрические координаты r, θ и z и ограничимся случаем токов, направленных по оси z и не зависящих от угла θ. В этом случае, как показал Г. А. Гринберг [1], волновые процессы описываются скалярным волновым уравнением:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\varepsilon k^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon k^2}\frac{\partial A}{\partial z}\right)+\varepsilon k^2 A=-\frac{4\pi}{c}J(r,z), \tag{1}$$

где A — компонента вектора потенциала A_z, а k — волновое число.

Представим A в виде спектра

$$A=\sum_j \varphi_j(r)\,Z_j(z)+\int\varphi(r,\chi)\,Z(z,\chi)\,d\chi, \tag{2}$$

где $Z_j(z)$ и $Z(z,\chi)$ — собственные функции дискретной и непрерывной частей спектра задачи на собственные значения χ, определяемые уравнением

$$\varepsilon k^2\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon k^2}\frac{dZ}{dz}\right)+\varepsilon k^2 Z+\chi Z=0 \tag{3}$$

при условиях однозначности и ограниченности функций Z. Будем считать их нормированными обычным образом к 1 и дельта-функции $\delta(\chi-\chi')$.

Подставляя (2) в (1) и принимая во внимание (3) и нормировку, получим для коэффициентов Фурье φ совокупность уравнений

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)-\chi r\varphi=-\frac{4\pi}{c}r\bar{J}(r),\ \text{где}\ \bar{J}(r)=\int J(r,z)\,Z(z)\,dz. \tag{4}$$

Решение (4) получим с помощью функции Грина $K(r,\rho)$:

$$\varphi(r)=\frac{\pi^2}{ic}\int_0^\infty K(r,\rho)\,\rho\bar{J}(\rho)\,d\rho, \tag{5}$$

где K при выполнении условия ограниченности при $r=0$ и условия излучения при $r\to\infty$ имеет вид

$$J_0(\sqrt{-\chi}\rho)\,H_0^{(2)}(\sqrt{-\chi}r) \text{ для } r>\rho; \quad H_0^{(2)}(\sqrt{-\chi}\rho)\,J_0(\sqrt{-\chi}r) \text{ для } r<\rho^*. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2) и предполагая, что все источники сосредоточены внутри круга радиуса S, получим для A:

$$A=\sum_j C_j Z_j(z)\,H_0^{(2)}(\sqrt{-\chi_j}r)+\int C(\chi)\,Z(z,\chi)\,H_0^{(2)}(\sqrt{-\chi}r)\,d\chi. \quad (7)$$

Таким образом, вне области источников решение представляется в виде спектра убегающих в бесконечность нормальных волн (2) с амплитудами

$$C_j=\frac{2\pi^2}{ic}\int_0^R J_0(\sqrt{-\chi_j}\rho)\,\rho\bar{J}_j(\rho)\,d\rho, \quad C(\chi)=\frac{2\pi^2}{ic}\int_0^R J_0(\sqrt{-\chi}\rho)\,\rho\bar{J}(\rho,\chi)\,d\rho. \quad (8)$$

Для бесконечно тонкой вертикальной антенны, расположенной по оси z и несущей ток $I(z)$.

$$C_j=\frac{\pi}{ic}I_j, \quad I_j=\int I(z)\,Z_j(z)\,dz. \quad (9)$$

Если эта антенна может быть апроксимирована бесконечно малым диполем с электрическим моментом P, помещенным в точку $z=\zeta$, $r=0$, то

$$A(r,z)=\frac{\pi P}{ic}\left\{\sum_j Z_j(\zeta)\,Z_j(z)\,H_0^{(2)}(\sqrt{-\chi_j}r)+\right.$$

$$\left.+\int Z(\zeta,\chi)\,Z(z,\chi)\,H_0^{(2)}(\sqrt{-\chi}r)\,d\chi\right\}. \quad (10)$$

Отрицательным собственным значениям χ соответствуют незатухающие нормальные волны, а положительным χ — быстро затухающие волны. Поэтому на достаточно больших расстояниях от источников суммирование и интегрирование в (7) можно ограничивать только значениями $\chi<0$.

2. Дискретный спектр. Волноводные каналы в среде. Особый интерес представляют случаи дискретного спектра χ, когда среда обладает свойствами волновода. Простейшим примером является однородный слой с $\varepsilon=1$, заключенный между двумя идеально проводящими плоскостями $z=0$ и $z=h$. Уравнение (3) дает дискретный спектр собственных функций и значений

$$Z_0=\frac{1}{h}, \quad Z_j=\sqrt{\frac{2}{h}}\cos\frac{\pi j}{h}z, \quad j=1,2,\ldots; \qquad \chi_j=\frac{\pi^2 j^2}{h^2}-k^2. \quad (11)$$

Если излучающей системой является бесконечно малый диполь, то подстановка (11) в (10) дает известную формулу Вейриха ([3]).

Покажем, что волноводными свойствами обладает любая среда с плавно меняющимися свойствами, если спектр χ дискретен. Для этого приведем уравнение (3) с помощью подстановки $Z=k\sqrt{\varepsilon}\Psi$ к уравнению шредингеровского типа

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}+[\chi+W(z)]\,\Psi=0, \quad (12)$$

* Здесь J_0 и H_0 — функции Бесселя и Ганкеля нулевого порядка.

где

$$W(z)=\varepsilon k^2-\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)_{zz}. \qquad (13)$$

Пусть $z=\zeta_1$ и $z=\zeta_2$ — особые точки уравнения (12), в которых $W\to-\infty$. Требование регулярности решений Ψ в этих точках эквивалентно краевым условиям, дающим дискретный спектр. Если $W>0$ в интервале (z_1, z_2), где $\zeta_1<z_1<z<z_2<\zeta_2$, как показано на рис. 1, то первые номера χ будут отрицательными. Пересечение прямых $W=\chi_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ с кривой $W(z)$ происходит в точках z_{1j} и z_{2j} и определяет интервал, внутри которого Ψ_j имеет конечные значения; вне интервала (z_{1j}, z_{2j}) функции Ψ_j монотонно убывают.

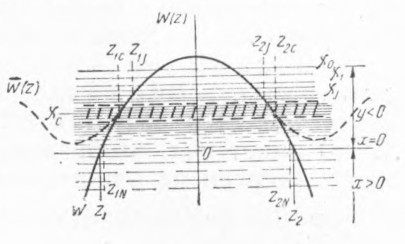

Рис. 1

На больших расстояниях, когда сумму (7) можно ограничить номером $j=N$, где χ_N — наименьшее отрицательное собственное значение,

$$A(r, z)\simeq\frac{k\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{r}}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{|\chi_j|}}C_j\Psi_j(z)\,e^{-i\left(\sqrt{|\chi_j|}\,r-\frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (14)$$

Выражение (14) показывает, что волновой процесс может иметь конечные амплитуды только между плоскостями z_{1N} и z_{2N} и убывает от источника в среднем как $1/\sqrt{r}$, так как сумма в (14) является квазипериодической функцией. Таким образом, среда обладает способностью канализировать энергию вдоль слоя*.

В качестве примера рассмотрим среду, у которой

$$W(z)=A-Bz^2. \qquad (15)$$

Уравнение (12) дает спектр собственных функций и значений

$$\Psi(z)=e^{-z^2/2}H_j(z), \quad \chi_j=-A+\sqrt{B}(2j+1), \quad j=0, 1, 2, \ldots, \qquad (16)$$

где $H_j(z)$ полиномы Эрмита.

Если ε — медленно меняющаяся функция z и интервал (z_{1N}, z_{2N}) содержит много длин волн $\lambda=2\pi/k$, то спектр χ может быть заменен сплошным, и антенна с распределением тока

$$I(z)=0 \text{ для } z>\Delta z \text{ и } z<-\Delta z; \qquad I(z)=e^{-in_0z} \text{ для } \Delta z\geqslant z\geqslant-\Delta z \qquad (17)$$

возбудит в среде пакет нормальных волн с волновыми числами, лежащими в интервале $\Delta\nu=\frac{2\pi}{\Delta z}\frac{n_0}{\nu_c}$, где $\nu_c=\sqrt{k^2\varepsilon(0)-n_0^2}$ — волновое число центральной волны пакета. Производя интегрирование в (7) для случая (17), нетрудно показать, что на больших расстояниях r в плоскости rOz образуется луч конечной ширины $d=\frac{2\pi}{\Delta\nu}\cos\alpha$, где α — угол между касательной к траектории луча

$$r=\nu_c\int^{z}\frac{dz}{\sqrt{k^2\varepsilon-\nu_c^2}} \qquad (18)$$

и осью Oz.

Между лучевой и волновой трактовками вопроса существует

---

* Существование волноводных каналов в ионосфере и тропосфере было доказано автором в его докторской диссертации [2], где детально излагается метод нормальных волн. Эквивалентность проблем волновода и волноводоподобной среды установлена в той же диссертации и в работах [4].

соответствие, заключающееся в связи между волновым числом $\nu_c = \sqrt{|\chi_c|}$ центральной волны пакета и направлением луча

$$\nu_c = k\sqrt{\varepsilon(z)} \sin\alpha. \tag{19}$$

Из (18) и рис. 1 следует, что траектория луча ограничена плоскостями возврата z_{1c}, z_{2c}, определяемыми из уравнения $k^2\varepsilon = \nu_c^2$. Луч будет либрировать между плоскостями z_{1c}, z_{2c}, испытывая на границах рефракцию. Этим и обусловлены волноводные свойства среды.

3. Взаимодействие волноводных каналов. Пространственные биения. В случае двух волноводных каналов, возникающих в результате такого распределения $\varepsilon(z)$, что функция $W(z)$ имеет вид, изображенный на рис. 2, возможна перекачка волновой энергии из одного канала в другой.

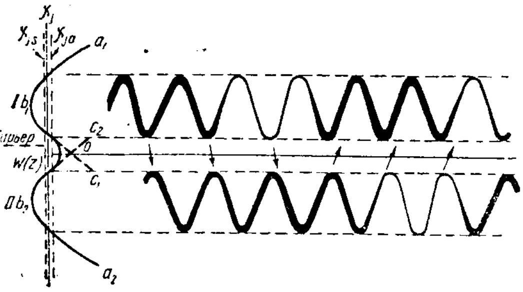

Рис. 2

На языке нормальных волн это явление заключается в расщеплении исходных χ_j, соответствующих изолированным каналам, на дублеты $\chi_j - \Omega_j$ и $\chi_j + \Omega_j$. Нетрудно показать, что

$$\Omega_j \cong \frac{e^{-2\int\limits_0^{z_1}\sqrt{k^2\varepsilon - \chi_j}\,dz}}{2\left\{\dfrac{d}{d\chi}\displaystyle\int\limits_{z_1}^{z_2}\sqrt{k^2\varepsilon - \chi_j}\right\}_{\chi=\chi_j}}. \tag{20}$$

Если в одном из каналов поместить антенну, возбуждающую волну Ψ_j изолированного канала, то поле в первом канале будет

$$\frac{k\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{r}}\,\Psi_j(z)\cos\left\{\frac{\Omega_j}{\sqrt{|\chi_j|}}r\right\}e^{-i\sqrt{|\chi_j|}\,r}, \tag{21}$$

а для второго канала в (21) вместо cos стоит sin.

Таким образом, в каналах будут иметь место пространственные биения с периодом $\Delta r = \pi\sqrt{|\chi_j|}/\Omega_j$. Относя, согласно (19), выражения (21) к центральным волнам пакетов, получим, что луч, либрирующий между стенками первого канала, будет постепенно просачиваться во второй канал и отдавать свою энергию лучу в этом канале. Через интервал $\Delta r/2$ каналы обмениваются ролями.

4. Просачивание энергии через стенки канала описывается с помощью функции W (рис. 1). В этом случае спектр χ_j, соответствующий идеализированной задаче, превратится в квазидискретный спектр линий конечной ширины. Суммируя, согласно (7), сплошной спектр χ в пределах одной спектральной линии, получим

$$A_j(r, z) \cong \frac{\Psi_j(z)}{\Omega_j\sqrt{r}}\,e^{-\frac{\Omega_j}{2\sqrt{|\chi_j|}}}\,e^{-i\sqrt{|\chi_j|}\,r}, \tag{22}$$

где Ω_j имеет то же значение, что и в (20). Таким образом, просачивание через барьер в первом приближении сказывается в виде затухания нормальных волн идеализированной задачи.

Поступило
19 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гринберг, ДАН, 26, 581 (1940). [2] П. Е. Краснушкин, Диссертация, МГУ, ноябрь, 1945. [3] R. Weyrich, Ann. d. Phys., 85, 552 (1928). [4] P. Krasnooshkin, J. of Physics, 10, № 434 (1946); Вестник Моск. ун-та., № 1, 37 (1946); П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, МГУ, 1947.