Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 7

МАТЕМАТИКА

А. А. РЕНЬИ

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА АКАДЕМИКА И. М. ВИНОГРАДОВА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 I 1947)

Первая нетривиальная оценка суммы характеров была дана Г. Полиа [1] в 1918 г. (ср. также [2] и [3]). Он доказал, что

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\chi(n)\right|\leqslant c\sqrt{D}\ln D, \tag{1}$$

где $\chi(n)$ — неглавный примитивный характер по модулю D (c, c_1, $c_2, \ldots$ постоянные). Наиболее изящное доказательство (1) дал акад. И. М. Виноградов.

Палеи [4] доказал, что

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\chi(n)\right|\geqslant c\sqrt{D}\ln\ln D \tag{2}$$

при бесконечно многих подходящих величинах D, χ и x ($x\leqslant D-1$) (ср. также [5]).

Вопрос о точном порядке суммы характеров важен ввиду связи с некоторыми основными задачами теории чисел. Например, оценка суммы характеров связана с одной гипотезой акад. И. М. Виноградова. Именно, согласно любезному сообщению проф. Ю. В. Линника, если в случае $\chi(-1)=-1$ оценка вида

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\chi(n)\right|=o(\sqrt{D}\ln D) \tag{3}$$

была бы доказана, следовала бы гипотеза акад. И. М. Виноградова, что при любом $\varepsilon>0$ и для $D\geqslant c$ наименьший квадратичный невычет по модулю D меньше, чем D^{ε}. Совсем другое положение, если $\chi(-1)=+1$. Существует следующая

Теорема. *Пусть D — фундаментальный дискриминант, $\left(\frac{D}{-1}\right)=+1$. Если наименьший квадратичный невычет по модулю D больше, чем D^{ε}, имеем:*

$$\sqrt{\frac{D}{12}}<\max_{1\leqslant x\leqslant D-1}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left(\frac{D}{n}\right)\right|<c(\varepsilon)\sqrt{D}, \tag{4}$$

где постоянное $c(\varepsilon)$ зависит только от ε $\left(\left(\frac{D}{k}\right)\right.$ — символ Кронекера$\left.\right)$.

Эти результаты будут опубликованы в отдельной статье.

В настоящей работе покажем, применяя метод акад. И. М. Виноградова, что при подходящем иррациональном числе α в случае $\chi(-1)=+1$ имеем

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant \alpha D} \chi(n)\right| \leqslant \gamma\sqrt{D}\,(\ln\ln D)^2. \tag{5}$$

В случае $\chi(-1)=-1$ имеем

$$\left|\sum_{\beta D\leqslant n\leqslant \alpha D} \chi(n)\right| \leqslant \gamma\sqrt{D}\,(\ln\ln D)^2 \tag{6}$$

при подходящих иррациональных числах α и β ($\gamma>0$ постоянное).

Существование таких α и β легко следует из формулы Парсеваля, примененной к ряду Фурье функции

$$S(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant xD} \chi(n). \tag{7}$$

Все дело заключается в том, чтобы найти эффективные значения α и β. Докажем, например, что для (5) и (6) α и β можно выбрать равными $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $e-[e]$, $\frac{e-1}{e+1}$, $\sqrt{e}-1$ и т. д.

В дальнейшем называем иррациональные числа α принадлежащими к классу (Λ, ρ), если элементы цепной дроби

$$\alpha=[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] \tag{8}$$

(a_n — целое положительное) удовлетворяют условиям

$$a_n\leqslant\Lambda n^\rho \quad (n=1, 2, \ldots;\quad \Lambda\geqslant 1;\ \rho\geqslant 0). \tag{9}$$

Докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\chi(n)$ — неглавный примитивный характер по модулю D, $\chi(-1)=+1$, и пусть α принадлежит к классу $[(\ln D)^t;\ \rho]$, $t>0$, $\rho\geqslant 0$; тогда имеем* (5), *где* $\gamma\leqslant c(\rho+t+6)$.

Теорема 2. *В случае $\chi(-1)=-1$, если α и β принадлежат классу $[(\ln D)^t;\ \rho]$, имеем* (6), *где* $\gamma\leqslant c(\rho+t+6)$.

Теоремы 1 и 2 суть следствия следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть $a_n=\chi(n)/n$ и пусть α принадлежит к классу $[(\ln D)^t;\ \rho]$, $t>0$, $\rho\geqslant 0$; имеем:*

$$\left|\sum_{n=1}^{D} a_n e^{2\pi i n\alpha}\right| \leqslant \gamma_1(\ln\ln D)^2, \tag{10}$$

где

$$\gamma_1\leqslant c(\rho+t+5). \tag{11}$$

Для доказательства нам нужна элементарная

Лемма 2. *Пусть α принадлежит к классу $[(\ln D)^t;\ \rho]$. При каждом P, $1\leqslant P\leqslant D$, найдется натуральное число q, удовлетворяющее условиям*

$$P<q\leqslant 2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^\rho P(\ln D)^{\rho+t}. \tag{12}$$

При этом α представится в виде $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\vartheta}{q^2}$, где $(a, q)=1$ и $|\vartheta|<1$.

Доказательство леммы 2. Пусть q_n — знаменатель подходящей дроби порядка n цепной дроби α. Так как $q_n \geqslant 2^{\frac{n-1}{2}}$ ([6], теорема 12), с помощью формулы $q_{n+1} = q_n a_n + q_{n-1}$ следует (12) для $q = q_n$.

Доказательство леммы 1. Пусть $B = (\ln D)^s$, $s = \rho + t + 5$. Целые числа $n \leqslant D$ разбиваем на три последовательности. Первая последовательность содержит числа, все простые делители которых меньше, чем B. Если n не принадлежит к первой последовательности, то n имеет вид $n = pm$, где $p \geqslant B$ — наибольший простой делитель числа n. Если $m < B$, мы относим n ко второй последовательности, в противном случае — к третьей. Полагаем

$$T(x) = \sum_{n=1}^{D} a_n e^{2\pi i n x} = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x), \tag{13}$$

где через $T_1(x)$, $T_2(x)$ и $T_3(x)$ будем обозначать суммы членов $T(x)$, индекс которых принадлежит к первой, второй или третьей последовательности. Выводим непосредственно, что

$$|T_1(x)| < \prod_{p \leqslant B} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} < c_1 s \ln\ln D, \tag{14}$$

$$|T_2(x)| < \left(\sum_{m \leqslant B} \frac{1}{m}\right)\left(\sum_{B < p \leqslant D} \frac{1}{p}\right) < c_2 s (\ln\ln D)^2. \tag{15}$$

Пусть

$$N_k = \frac{D}{B\, 2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, K, \text{ где } K = \left[\frac{\ln (D/B^2)}{\ln 2}\right] + 1. \tag{16}$$

Полагаем

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{K-1} T_{kr}(x), \tag{17}$$

где

$$T_{kr}(x) = \sum_{N_{k+1} < p \leqslant N_k} \frac{1}{p} \sum_{N_{r+1} < m \leqslant N_r}{}' \chi(p)\, a_m e^{2\pi i m p x}; \tag{18}$$

штрих над суммой показывает, что сумма распространена только на те числа m, которые меньше, чем D/p, и все простые делители которых не превосходят p. В силу неравенства Шварца выводим

$$|T_{kr}(x)|^2 \leqslant \left(\sum_{N_{k+1} < p \leqslant N_k} \frac{1}{p^2}\right)\left(\sum_{N_{k+1} < p \leqslant N_k} \left| \sum_{N_{r+1} < m \leqslant N_r}{}' a_m e^{2\pi i p m x} \right|^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{N_{k+1}} \sum_{N_{k+1} < \xi \leqslant N_k} \left| \sum_{N_{r+1} < m \leqslant N_r} a_m e^{2\pi i \xi m x} \right|^2, \tag{19}$$

где ξ пробегает все целые числа между N_{k+1} и N_k. Поэтому

$$|T_{kr}(x)|^2 \leqslant \frac{1}{N_{k+1}} \sum{}' \frac{1}{mm'} \left| \sum_{N_{k+1} \leqslant \xi \leqslant N_k} e^{2\pi i \xi (m - m') x} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{N_{k+1} N_{r+1}} \sum_{h=0}^{N_{r+1}} \min\left(N_{k+1}, \frac{1}{2(xh)}\right). \tag{20}$$

Применяя хорошо известную лемму акад. И. М. Виноградова ([7], стр. 15, лемма 8), мы получим из (20) с помощью леммы 2, что

$$|T_{k_r}(x)|^2 \leqslant c_3\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^{\rho}\left(\frac{1}{N_{r+1}}+\frac{(\ln D)^{\rho+l+1}}{N_{k+1}}\right). \tag{21}$$

Из (17) и (21), приняв в расчет, что

$$\sum_{r=0}^{K-1}\frac{1}{N_{r+1}} \leqslant \frac{4}{B}, \tag{22}$$

и в силу неравенства Шварца получим, что для $D \geqslant c_6$

$$|T_3(x)| \leqslant c_4\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^{\rho/2}(\ln D)^{-1/2} \leqslant c_5. \tag{23}$$

Поэтому из (13), (14), (15) и (23) следует лемма 1.

Рассмотрим ряды Фурье функции (7). Если $\chi(-1)=+1$, имеем (см. [4])

$$S(x) \sim \frac{\varepsilon\sqrt{D}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n}\sin 2\pi n x. \tag{24}$$

В случае $\chi(-1)=-1$ имеем

$$S(x)-S(y) \sim \frac{\varepsilon\sqrt{D}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n}(\cos 2\pi n x-\cos 2\pi n y), \tag{25}$$

где $|\varepsilon|=1$.

Будет достаточно набросать доказательство только теоремы 1, потому что доказательство теоремы 2 совершенно аналогично. Пусть $k=[\alpha D]$. Функция $S(x)$ ограниченной вариации, поэтому ряд Фурье (24) сходится. Для $x=k/D$ сумма ряда (24) есть $\sum\limits_{n=1}^{k-1}\chi(n)+\frac{1}{2}\chi(k)$. Очевидно, имеем

$$\left|\sum_{n=1}^{D}\frac{\bar{\chi}(n)}{n}\left(\sin 2\pi n\frac{k}{D}-\sin 2\pi n\alpha\right)\right| \leqslant \pi, \tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^{D}\bar{\chi}(n)\sin 2\pi n\frac{k}{D}=0. \tag{27}$$

Из (27) следует

$$\left|\sum_{n=D+1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)\sin 2\pi n\frac{k}{D}}{n}\right| \leqslant 1. \tag{28}$$

Таким образом, в силу леммы 1 из (26) и (28) следует (9).

За ценные указания выражаю благодарность проф. Ю. В. Линнику и проф. П. Туран.

Поступило
2 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Pólya, Nachr. Ges. Wiss. Cöttingen, Math.-Phys. Kl., 1, 21 (1918). [2] E. Landau, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1, 79 (1918). [3] I. Schur, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1, 30 (1918). [4] R. E. A. C. Paley, J. London Math. Soc., 7 (1932). [5] E. Landau, Math. Z., 37 (1933). [6] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1935. [7] И. М. Виноградов, Тр. Мат. ин-та им. В. И. Стеклова (1937).