Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 7

МАТЕМАТИКА

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

О ФОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ РАССЛОЯЕМЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 XII 1946)

Назовем пару конгруэнций расслояемой ([1]), если на соответствующих лучах их можно найти ∞^1 таких точек, чтобы касательная плоскость к поверхности, описываемой точкой луча одной конгруэнции, проходила бы через луч другой.

1. Можно ли присоединить к произвольной поверхности расслояемую пару конгруэнций, для которой данная поверхность является одной из фокальных поверхностей?

Найдем систему уравнений, которые определяют поверхность и присоединенную к ней расслояемую пару конгруэнций. Выберем в качестве системы отнесения тетраэдр, две вершины которого A_1, A_2 являются фокусами луча первой конгруэнции пары и A_3, A_4 — фокусами луча второй.

Имеем

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (\omega_i^k)' = [\omega_i^j \omega_j^k],$$

где ω_i^k — линейные формы дифференциалов и штрихом обозначены внешние производные.

Так как, по известному свойству расслояемой пары, плоскость $A_1A_2A_3$ касается фокальной поверхности, описываемой точкой A_1, то имеем:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^3 = 0,$$

где последние три уравнения написаны по аналогии.

Если касательная плоскость к поверхности, описываемой точкой $M = A_1 + \lambda A_2$ луча A_1A_2, проходит через луч A_3A_4, то имеем $[dMA_3A_4M] = 0$ или

$$d\lambda = \lambda(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \lambda^2\omega_2^1 - \omega_1^2.$$

Так как существует семейство ∞^1 поверхностей (M), необходимо, чтобы это выражение $d\lambda$ было полным дифференциалом и внешняя производная его равнялась нулю для любого λ. Это требование приводит нас к внешнему уравнению

$$[\omega_1^3 \omega_3^1] - [\omega_2^4 \omega_4^2] = 0,$$

и то же уравнение получается, если требовать, чтобы касательная плоскость к поверхности, описываемой точкой луча A_3A_4, проходила через луч A_1A_2.

Получаем следующую систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c}
\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0, \quad \omega_3^2=0, \quad \omega_4^1=0, \\
[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]=0, \\
[\omega_4^2\omega_2^1]+[\omega_4^3\omega_3^1]=0, \quad [\omega_1^3\omega_3^1]-[\omega_2^4\omega_4^2]=0.
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Характеристическая система содержит 12 форм:

$$\omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^4,\ \omega_3^4, \quad \omega_2^3,\ \omega_2^1,\ \omega_4^3, \quad \omega_3^2,\ \omega_4^1,\ \omega_3^1,\ \omega_4^2. \qquad (2)$$

Если поверхность (A_1) дана, то можно выбрать точки A_2, A_3 в касательной плоскости, и тогда будет:

$$\omega_1^4=0, \quad [\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0; \qquad (3)$$

второе уравнение есть внешняя производная первого.

Характеристическая система (3) содержит формы:

$$\omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^4,\ \omega_3^4. \qquad (4)$$

Система уравнений, получаемая приравниванием их нулю, вполне интегрируема, и ее первые интегралы могут быть приняты за переменные задачи. Но характеристическая система (4) составляет часть системы (2). Можно, следовательно, полученные переменные принять за первые пять переменных системы (1). Остальные семь неизвестных, которые входят в уравнения (1), определяют присоединенную расслояемую пару. Они удовлетворяют системе:

$$\left.\begin{array}{c}
\omega_4^1=0, \quad \omega_2^3=0, \quad \omega_3^2=0, \\
[\omega_4^2\omega_2^1]+[\omega_4^3\omega_3^1]=0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]=0, \\
[\omega_1^3\omega_3^1]-[\omega_2^4\omega_4^2]=0.
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Внешние уравнения системы содержат четыре формы, содержащие дифференциалы неизвестных функций, значения которых в интегральной точке определяют линейный интегральный элемент (5). Второй интегральный элемент, находящийся в инволюции с данным интегральным элементом, определяется из системы четырех линейных уравнений, детерминант которой

$$D=(\omega_1^3\omega_3^1-\omega_2^4\omega_4^2)(\omega_1^3\omega_3^4-\omega_1^2\omega_2^4)$$

отличен от нуля, если луч A_1A_2 репера не касается на поверхностях (A_1), (A_2) асимптотических линий. Отсюда следует, что общее решение системы (5) зависит от четырех произвольных функций одного аргумента.

Если $D=0$, то имеем $\omega_1^3\omega_3^4-\omega_1^2\omega_2^4=0$ (или $\omega_1^3\omega_3^1-\omega_2^4\omega_4^2=0$), откуда следует $\omega_2^4=\lambda\omega_1^3$, $\omega_3^4=\lambda\omega_1^2$ или $\omega_1^2=\lambda\omega_1^3$, $\omega_3^4=\lambda\omega_2^4$.

В первом случае конгруэнция (A_1A_2) вырождается в линейчатую поверхность, во втором — поверхность (A_1) становится линией.

Следовательно, к произвольной поверхности можно присоединить с произволом четыре функции одного аргумента расслояемую пару конгруэнций так, что для одной из конгруэнций данная поверхность будет фокальной.

2. Будем исследовать, с каким произволом можно присоединить

к данной конгруэнции вторую конгруэнцию так, чтобы они составили расслояемую пару.

Всегда можно присоединить к каждому лучу данной конгруэнции репер, у которого две вершины A_1 и A_2 помещены в фокусах луча, и плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$ являются касательными к фокальным поверхностям, откуда следует:

$$\left.\begin{array}{c} \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0; \\ [\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Квадратичные уравнения суть внешние производные уравнений Пфаффа. Формы

$$\omega_1^2, \ \omega_1^3, \ \omega_1^4, \ \omega_2^4, \ \omega_3^4, \ \omega_2^3, \ \omega_2^1, \ \omega_4^3 \tag{7}$$

образуют характеристическую систему (6). Можно взять как переменные, входящие в уравнения (6), первые интегралы, обращающие в нуль формы (7). Но система форм (7) составляет часть системы (2). Можно, следовательно, принять эти же интегралы за первые восемь переменных уравнений (1). Четыре другие функции, которые входят в (1), определяют тогда вторую конгруэнцию, которая образует с первой расслояемую пару. Следующие уравнения определяют эти четыре неизвестных:

$$\left.\begin{array}{c} \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0; \\ [\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0, \quad [\omega_1^3\omega_3^1] - [\omega_2^4\omega_4^2] = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Три внешних уравнения содержат только две формы ω_3^1 и ω_4^2, содержащие дифференциалы неизвестных функций системы (8). В общем случае систему нужно продолжать, но при условии $\omega_2^1 = \lambda\omega_3^4 - \mu\omega_2^4$, $\omega_4^3 = \lambda\omega_1^2 - \mu\omega_1^3$ первое внешнее уравнение (8) есть следствие двух других, и возможно особое решение. Эти условия накладывают ограничения на первую конгруэнцию пары, следовательно, их нужно присоединить к системе (6). Второе квадратичное уравнение (6) теперь дает: $-2\mu[\omega_1^3\omega_2^4] = 0$. Если внешнее произведение равно нулю, то конгруэнция вырождается в линейчатую поверхность. Если $\mu = 0$, то имеем: $\omega_2^1 = \lambda\omega_3^4$, $\omega_4^3 = \lambda\omega_1^2$, внешние производные будут:

$$[\Lambda\omega_3^4] + [\omega_4^1 + \lambda\omega_3^2, \ \omega_2^4] = 0, \quad [\Lambda\omega_1^2] + [\omega_1^3, \ \omega_4^1 + \lambda\omega_3^2] = 0,$$
$$\Lambda = d\lambda + \lambda(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4).$$

Отсюда следует, в силу (8), $\omega_4^1 + \lambda\omega_3^2 = 0$, следовательно, $[\Lambda\omega_3^4] = 0$, $[\Lambda\omega_1^2] = 0$, следовательно, $\Lambda = 0$ или $\omega_3^4 = \mu\omega_1^2$.

а) Если $\Lambda = 0$, то внешние производные от Λ и $\omega_4^1 + \lambda\omega_3^2$ тождественно равны нулю. Система

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^1 = \lambda\omega_3^4, \quad \omega_4^3 = \lambda\omega_1^2, \quad \omega_4^1 + \lambda\omega_3^2 = 0, \quad \Lambda = 0,$$
$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0$$

определяет первую конгруэнцию.

Внешнее уравнение содержит две формы, содержащие дифференциалы неизвестных функций. Общее решение зависит, следовательно, от одной произвольной функции двух аргументов. Конгруэнция принадлежит линейному комплексу ([2]). Система (8) принимает теперь вид:

$$\omega_3^2 = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0, \quad [\omega_1^3\omega_3^1] - [\omega_2^4\omega_4^2] = 0.$$

Она находится в инволюции, и ее общее решение зависит от двух произвольных функций одного аргумента

б) Пусть $\omega_3^4 = \mu\omega_1^2$. Внешняя производная $\omega_4^1 + \lambda\omega_3^2 = 0$ становится $[\Lambda\omega_3^2] = 0$. Система (8) налагает условие $\omega_3^2 = 0$. Прибавляя внешние производные $\omega_3^2 = 0$ и $\omega_3^4 = \mu\omega_1^2$, получим систему уравнений для определения первой конгруэнции:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_2^1 = \lambda\omega_3^4, \quad \omega_4^3 = \lambda\omega_1^2, \quad \omega_3^4 = \mu\omega_1^2,$$
$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_3^1 - \mu\omega_4^2,\ \omega_1^2] = 0, \quad [\Lambda\omega_1^2] = 0,$$
$$[d\mu + \mu(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4),\ \omega_1^2] = 0.$$

Так как четыре внешних уравнения содержат четыре формы, содержащие дифференциалы неизвестных функций, то система находится в инволюции, и общее решение зависит от четырех произвольных функций одного аргумента.

В системе (8) сохраняется одно уравнение:

$$[\omega_1^3\omega_3^1] - [\omega_2^4\omega_4^2] = 0,$$

которое содержит две формы ω_3^1 и ω_4^2, содержащие дифференциалы неизвестных, но их комбинация $\omega_3^1 - \mu\omega_4^2$ входит в уравнения первой конгруэнции.

Вторая конгруэнция пары зависит, следовательно, от одной произвольной функции одного аргумента. Пара вырождается в дважды взятую конгруэнцию W с линейчатыми фокальными поверхностями ([2]).

Поступило
11 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Fubini, Ann. di Math. (4), 1, 241 (1924). [2] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937, стр. 188—191.