Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик В. А. ФОК

ДИФРАКЦИЯ РАДИО-ВОЛН ВОКРУГ ЗЕМНОГО ШАРА*

Настоящая статья представляет краткое изложение результатов теоретического исследования вопроса о распространении радио-волн вокруг однородной земной поверхности при учете дифракции, но без учета влияния ионосферы. Полный текст нашей работы печатается в виде отдельной монографии.

1. Обозначим через r, ϑ, φ сферические координаты с началом в центре земного шара. Уравнение земной поверхности есть $r=a$, где a — радиус земного шара. Пусть в точке $r=b$, $\vartheta=0$ (где $b>a$) находится вертикальный электрический диполь. Как известно, по́ле выражается через функцию Герца U (вертикальную составляющую вектора Герца), удовлетворяющую уравнению $\Delta U+k^2U=0$. Значение поля на поверхности земли выражается через величины

$$U_a=(U)_{r=a};\qquad U_a'=\left(\frac{\partial}{\partial r}(rU)\right)_{r=a}. \tag{1}$$

Для этих величин известны выражения в виде рядов. Положим

$$k=2\pi/\lambda;\quad k_2=k\sqrt{\eta};\quad \eta=\varepsilon+i4\pi\sigma/ck, \tag{2}$$

где λ — длина волны в пустоте и η — комплексная диэлектрическая постоянная земли. Введем функции

$$\zeta_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho);\quad \psi_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho);$$
$$\chi_n(\rho)=\psi_n'(\rho)/\psi_n(\rho), \tag{3}$$

где $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ и $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ суть функции Ханкеля и Бесселя. Тогда величина U_a может быть представлена в виде ряда, расположенного по полиномам Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$, а именно

$$U_a=-\frac{1}{kab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\zeta_n(kb)}{\zeta_n'(ka)-\frac{k}{k_2}\chi_n(k_2a)\zeta_n(bk)}P_n(\cos\vartheta). \tag{4}$$

Величина U_a' может быть представлена в виде аналогичного ряда, которого мы здесь не выписываем.

---

* Доложено на теоретическом коллоквиуме Физического института АН СССР 30 мая 1944 г. и в заседании Отделения физико-математических наук 21 декабря 1944 г.

2. Выражение (4) для U_a, а также выражение для U_a' известны. Наша задача состоит в приближенном суммировании этих рядов. Рассматриваемые ряды будут вида

$$S = \sum_{\nu = {}^1/_2, {}^3/_2 \ldots} \nu\varphi(\nu) P_{\nu - \frac{1}{2}}(\cos\vartheta), \tag{5}$$

где значение $\varphi(\nu)$ получится из сравнения (4) и (5) (в случае ряда для U_a). Непосредственное суммирование этих рядов невозможно, так как для этого пришлось бы взять огромное число членов (порядка ka, т. е. порядка числа волн, укладывающихся по окружности земного шара). Поэтому необходимо преобразовать их сперва в интегралы, к вычислению которых можно применить приближенные методы. Положим

$$G_\nu = \frac{\Gamma(\nu + {}^1/_2)\,\Gamma({}^1/_2)}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \nu + 1, \frac{ie^{-i\vartheta}}{2\sin\vartheta}\right) \tag{6}$$

и обозначим через $P^*_{\nu - \frac{1}{2}}$ и через G^*_ν выражения, получаемые из $P_{\nu - \frac{1}{2}}(\cos\vartheta)$ и из G_ν заменой ϑ на $\pi - \vartheta$. Тогда будет

$$P_{\nu - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2\sin\vartheta}}\left[e^{i\nu\vartheta - i\frac{\pi}{4}} G^*_\nu + e^{-i\nu\vartheta + i\frac{\pi}{4}} G_\nu\right] \tag{7}$$

и аналогично для $P^*_{\nu - \frac{1}{2}}$. Ряд (5) можно написать в виде суммы вычетов интеграла

$$S = \frac{i}{2}\int \nu\varphi(\nu)\sec\nu\pi P^*_{\nu - \frac{1}{2}}\,d\nu, \tag{8}$$

относящихся к полюсам $\nu = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$ подъинтегральной функции. Интеграл же (8) можно представить в виде суммы 3 интегралов

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \tag{9}$$

где

$$S_1 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2\sin\vartheta}}\int_{C_1} \nu\varphi(\nu)\, e^{i\nu\vartheta} G^*_\nu\,d\nu, \tag{10}$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}\int_{C_2} \nu\varphi(\nu)\sec\nu\pi e^{i\nu\pi} P_{\nu - \frac{1}{2}}\,d\nu, \tag{11}$$

$$S_3 = \frac{i}{2}\int_{C_3} \nu\varphi(\nu)\sec\nu\pi P^*_{\nu - \frac{1}{2}}\,d\nu. \tag{12}$$

Контур C_1 охватывает полюса $\varphi(\nu)$ (расположенные в первой четверти), контур C_2 охватывает те же полюса и оставляет полюса $\sec\nu\pi$ снаружи, контур C_3 представляет прямую, расположенную во второй и четвертой четвертях и проходящую через начало координат (сверху вниз). Оценка интегралов S_2 и S_3 показывает, что оба они ничтожно малы по сравнению с S_1, а именно, интеграл S_2 того же порядка, как амплитуда волны, обошедшей в силу одной только дифракции вокруг земного шара, а интеграл S_3 того же порядка, как амплитуда волны, пронизавшей толщу земного шара с тем поглощением, какое имеет место в земле. Таким образом, со всею точностью, допускаемой постановкой физической задачи, сумма S равна интегралу S_1.

3. Положение главного участка интегрирования в интеграле S_1 зависит от того, для какой точки интеграл вычисляется. Если обозначить через γ угол между вертикалью в точке наблюдения и на-

правлением на источник, то характерным параметром является величина

$$p = (ka/2)^{\frac{1}{3}} \cos\gamma. \tag{13}$$

Большие положительные значения p соответствуют освещенной области. Значения p порядка единицы (положительные и отрицательные) соответствуют области полутени. Отрицательные и большие по абсолютной величине значения p соответствуют теневой области. Для больших положительных p на главном участке интегрирования к входящим в $\varphi(\nu)$ функциям Ханкеля применимы выражения Дебая. Используя их и применяя метод стационарной фазы, можно показать, что при условии

$$kh\cos\gamma \gg 1, \tag{14}$$

где $h = b - a$ есть высота источника над землей, для функции Герца U_a получается так называемая «отражательная формула»

$$U_a = \frac{e^{ikR}}{R} \cdot W; \qquad W = \frac{2}{1 + \frac{k}{k_2}\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}\sin^2\gamma}\,\sec\gamma}, \tag{15}$$

причем R есть расстояние точки наблюдения от источника ($R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta}$). Если же заменить (14) неравенствами

$$1 \ll R^2/h^2 \ll (ka)^{2/3}, \qquad 1 \ll kR \ll a/h \tag{16}$$

и применить уточненный метод стационарной фазы, учитывающий быстрое изменение знаменателя подъинтегральной функции вблизи точки экстремума фазы, мы приходим к известной формуле Вейля—ван дер Поля, которую можно написать в виде

$$W = 2 - 4\sigma e^{-(\sigma+\tau)^2} \int_{i\infty}^{\sigma+\tau} e^{\alpha^2} d\alpha, \tag{17}$$

где

$$\sigma = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{k}{k_2} \sqrt{\frac{kR}{2}}; \quad \tau = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{h}{R} \sqrt{\frac{kR}{2}}. \tag{18}$$

Новыми являются здесь, повидимому, неравенства (14) и (16), дающие условия применимости соответствующих формул (15) и (17); самые же формулы известны.

4. Наибольший интерес представляет область полутени (p порядка единицы). В этом случае на главном участке интегрирования асимптотические выражения Дебая неприменимы, и их нужно заменить следующими

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_{\nu - \frac{1}{2}}(\rho) = -i(\rho/2)^{\frac{1}{6}} w(t), \quad \zeta'_{\nu - \frac{1}{2}}(\rho) = i(\rho/2)^{-\frac{1}{6}} w'(t); \\ &\text{где } t = \frac{\nu - \rho}{(\rho/2)^{1/3}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Функция $w(t)$ определяется интегралом

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C e^{tz - \frac{1}{3}z^3} dz, \tag{20}$$

где контур C есть ломаная линия, идущая по лучу $\arg z = -2\pi/3$ от ∞ до 0 и по положительной вещественной оси от 0 до ∞. При конечных t погрешность асимптотических выражений (19) порядка $\rho^{-\frac{2}{3}}$. Используя эти выражения, мы приходим к следующей формуле для U_a

$$U_a = \frac{e^{ika\vartheta}}{a\vartheta} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_\Gamma e^{ixt} \frac{w(t-y)}{w'(t) - qw(t)} dt, \tag{21}$$

где контур Γ идет от $i\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$, а величины x, y и q имеют значения

$$x = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta; \quad y = \left(\frac{ka}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} kh; \quad q = i\left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{\eta - 1}}{\eta}. \tag{22}$$

Величина x есть приведенное горизонтальное расстояние от источника, а величина y есть приведенная высота. Параметр p выражается, в данном приближении, через x и y следующим образом

$$p = (y - x^2) / 2x. \tag{23}$$

Отсюда видно, что уравнение линии горизонта (граница геометрической тени) есть $x = \sqrt{y}$.

Выражение (21), вывод которого является главным результатом нашей работы, применимо для всех значений параметров, представляющих практический интерес. В предельных случаях из него получаются более простые формулы. В частности, если $x \ll y \ll 1/x$, оно дает формулу Вейля — ван дер Поля. В теневой области (большие отрицательные p) оно также применимо; для этой области его удобно вычислять как сумму вычетов в полюсах подъинтегральной функции, т. е. в корнях знаменателя $w'(t) - qw(t)$. Получаемый ряд соответствует ряду Ватсона, но представляет то преимущество, что члены нашего ряда имеют простые выражения.

Формула (21) дает также возможность исследовать область полутени (большие x и y, конечные p). Эта область никем до сих пор не исследовалась. Если положить

$$V(x, y, q) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_\Gamma e^{ixt} \frac{w(t-y)}{w'(t) - qw(t)} dt, \tag{24}$$

$$V_1(z, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\Gamma \frac{e^{izt}}{w'(t) - qw(t)} dt, \tag{25}$$

то при больших x, y и конечных $x - \sqrt{y}$ будет, с относительной погрешностью порядка $1/\sqrt{y}$,

$$V(x, y, q) = e^{i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}} V_1(x - \sqrt{y}, q). \tag{26}$$

Таким образом, функция V от двух аргументов и от параметра q сводится к функции V_1 от одного аргумента и от того же параметра — функции, которая может быть табулирована.

В заключение заметим, что выражение (24) для V может быть также получено методом параболического уравнения, предложенным М. А. Леонтовичем и примененным им к выводу формулы Вейля — ван дер Поля. Применение метода Леонтовича (с некоторыми уточнениями) к данной задаче будет рассмотрено в особой статье.

Поступило
19 II 1945