Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

ГИДРОЛОГИЯ

М. А. ВЕЛИКАНОВ, член-корреспондент АН СССР

ДВИЖЕНИЕ ДОННЫХ НАНОСОВ

Движение донных (иначе «влекомых») наносов, согласно современным воззрениям, происходит так, что отдельные частицы, из числа лежащих на дне, при благоприятных кинематических условиях отделяются от дна, переносятся на некоторое расстояние, зависящее также от сочетания мгновенных скоростей, и снова ложатся на дно, где ожидают наступления следующей, благоприятной для дальнейшего движения комбинации скоростей. Как распределение мгновенных скоростей в турбулентном потоке, так и форма и размеры отдельных твердых частиц имеют определенно с л у ч а й н ы й характер, почему и относящиеся сюда закономерности могут быть получены лишь статистическим путем. Впервые такого рода теория была разработана Эйнштейном [1], но его статистический анализ не приводит непосредственно к искомой зависимости, которая тем же автором в другой работе получается чисто эмпирическим путем [2]. Здесь мы излагаем иной метод решения задачи, при котором весь вывод с начала до конца основан лишь на статистике турбулентных пульсаций, а экспериментальные данные используются в отдельных звеньях всего построения лишь для установления значений параметров или эмпирических связей между параметрами, но не влияют на теоретическую структуру зависимости твердого расхода от размера частиц и от скоростей потока. Эта зависимость выводится нами из ряда общепризнанных и, повидимому, бесспорных положений современного учения о турбулентности; но в статистическом отношении вывод покоится на одном постулате, справедливость которого, хотя бы приближенная, нам представляется очевидной. А именно: мы принимаем, что непрерывный временной процесс, заключающийся в получении величиной x случайных приращений, удовлетворяющих закону нормального распределения, всегда может быть разбит по времени на такие интервалы, что корреляция между смежными, осредненными по этим интервалам значениями x будет близка к нулю.

Переходим к выводу искомой зависимости, причем ограничимся рассмотрением плоского и равномерного потока, поскольку лишь этот простейший случай проанализирован в современных теориях турбулентного потока; в отношении наносов мы предполагаем стационарность распределения и однородный состав частиц. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

p — объемный расход наносов на единицу ширины потока,
D — средний диаметр переносимых частиц,
W — скорость переноса потоком поднятых частиц,
u, v — значения соответственно продольной и поперечной компонент мгновенной скорости вблизи неподвижного слоя наносов,
w — скорость осаждения частицы в стоячей воде.

Совокупность всех частиц, пересекающих данный створ во взвешенном состоянии* в единицу времени, образует твердый расход:

$$p = NAD^3, \tag{1}$$

где A — коэффициент формы.

В целях упрощения статистических расчетов мы — как было указано в самом начале — преобразуем непрерывный временной процесс изменения компонентов скоростей через прерывный, с длиной ступеньки T, не меньшей, чем тот промежуток времени, на котором корреляция между разновременными скоростями исчезает:

$$R(u_t,\ u_{t+T}) = 0,$$
$$R(v_t,\ v_{t+T}) = 0.$$

Соответственно и путь, проходимый потоком, мы будем делить на интервалы, равные $L = TW$. Значения компонент скорости u и v, осредненные теперь по интервалам времени T, удовлетворяют, как это принято считать, нормальному закону Гаусса.

Введем теперь две вероятности:

1. Вероятность η того, что произвольно взятая, лежащая на дне частица в течение интервала T будет поднята и, следовательно, унесена, иначе говоря, вероятность выполнения неравенства превышения подъемной силы над собственным весом частицы:

$$S \geqslant P.$$

2. Вероятность ε того, что поднятая со дна частица опустится на дно лишь в конце интервала времени T, или, иначе, вероятность того, что частица сделает скачок длиною L.

Вычисляем обе вероятности. Подъемная сила, действующая на частицу, выражается через $B\rho D^2u^2$, где B — коэффициент, зависящий от формы частицы. Собственный вес частицы в воде равен $A(\rho_S - \rho)gD^3$. Неравенство $S \geqslant P$ напишется теперь, после всех сокращений, в виде:

$$Bu^2 \geqslant AagD, \qquad a = \frac{\rho_S}{\rho} - 1,$$

или

$$u \geqslant C\sqrt{gD}, \qquad C^2 = \frac{Aa}{B}.$$

А так как продольная компонента мгновенной скорости удовлетворяет закону Гаусса, то будем иметь для вероятности η следующее выражение:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_u} \int\limits_{C\sqrt{gD}}^{\infty} e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma_u^2}\,du,$$

или, после замены

$$\frac{u-\bar{u}}{\sigma_u} = z, \qquad \frac{C\sqrt{gD}-\bar{u}}{\sigma_u} = \mu,$$

получаем окончательно

$$\eta = {}^1/_2 - \Phi(\mu), \tag{2}$$

где мы пользуемся обычным символом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz.$$

---

* Сравнительно редкий случай чистого качения может также войти в схему как предельный при убывании высоты подъема частиц к нулю.

Аналогично вычисляем вероятность ε превышения вертикальной компоненты скорости над скоростью собственного падения частицы в течение времени T:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v}} \int_w^\infty e^{-v^2/2\sigma_v^2} dv$$

и аналогично после замены:

$$v / \sigma_v = z, \qquad w / \sigma_v = \nu$$

будем иметь:

$$\varepsilon = {}^1/_2 - \Phi(\nu). \tag{3}$$

Теперь мы можем подсчитать число N в уравнении (1). Нумеруем отрезки длиною L, начиная с расчетного створа вверх по течению. Число N представляет собой сумму числа частиц, принесенных к расчетному створу с первого, второго, третьего и т. д. отрезков. Для первого отрезка это число будет, очевидно, равно

$$\frac{L}{D^2} \eta\varepsilon.$$

Применяя далее, на основе нашего постулата, теорему умножения вероятностей, получим для второго отрезка число

$$\frac{L}{D^2} \eta\varepsilon^2,$$

для третьего

$$\frac{L}{D^2} \eta\varepsilon^3$$

и т. д.

Суммируя до бесконечности, будем иметь:

$$N = \frac{L}{D^2} \eta \left\{ \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots \right\} = \frac{L}{D^2} \frac{\eta\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (1) и раскрывая значения η и ε, получаем окончательно:

$$p = ADW \left[\frac{\left\{ {}^1/_2 - \Phi(\mu) \right\} \left\{ {}^1/_2 - \Phi(\nu) \right\}}{{}^1/_2 + \Phi(\nu)} \right]. \tag{4}$$

Первые три множителя представляют собой фиктивный расход «сплошного» влечения; множитель, стоящий в прямых скобках (как нетрудно видеть, всегда меньший единицы), выражает собой ту долю от «сплошного» влечения, которая будет иметь место при заданных значениях величин D, w, $\bar{u}$, σ_u, σ_v, определяющих собой параметры μ и ν. Например, при больших значениях D и w, или малости $\bar{u}$, функции $\Phi(\mu)$ и $\Phi(\nu)$ обе стремятся к ${}^1/_2$; следовательно, $p \to 0$; наоборот, при уменьшении D и w, а также при возрастании $\bar{u}$ имеем:

$$\Phi(\mu) \to -{}^1/_2, \qquad \Phi(\nu) \to 0;$$

значит p стремится к своему мыслимому пределу:

$$p \to ADW.$$

Отметим в заключение, что между D и w существует определенная зависимость, представленная весьма надежными эмпирическими формулами и что скорость переноса отдельных частиц W мы с полным правом и с хорошим приближением можем приравнять продольной скорости $\bar{u}$.

Для вычисления значений σ_u и σ_v при заданном значении $\bar{u}$ надо воспользоваться имеющимися в литературе опытными данными. Следовательно, наша теоретическая формула (4) может быть легко преобразована в пригодную для практических расчетов.

Поступило
21 II 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. A. Enstein, Der Geschiebetrieb als Warscheinlichkeitsproblem, Zürich, 1937. [2] H. A. Einstein, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 67, 3 (1941).