Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

ФИЗИКА

С. М. РЫТОВ

ОБ ОДНОМ РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 11 X 1944)

1. Метод малого параметра, разработанный для решения задач о нелинейных колебаниях А. А. Андроновым, А. А. Виттом и др. на основе теории Пуанкаре (отыскание периодических решений) (1) и теории Ляпунова (исследование устойчивости решений) (2), представляет собой разновидность метода возмущений. С этим связаны некоторые ограничения применимости метода малого параметра, касающиеся как исходного (нулевого) приближения, так и сходимости получаемых рядов. В пределах этих общих ограничений метод позволил, как известно, разрешить большое число задач об автономных и неавтономных нелинейных колебательных системах, преимущественно с одной и двумя степенями свободы. При этом были выявлены некоторые существенные возможности, заложенные в методе малого параметра.

А именно, наряду с теорией явлений, происходящих при действии на автоколебательную систему внешней силы с частотой, близкой к собственной частоте системы, явлений, соответствующих в этом отношении резонансу в линейных системах (3), оказалось возможным дать с помощью метода малого параметра теорию явления, не имеющего никакой параллели в линейных системах с постоянными параметрами. Я имею в виду возбуждение системы в унтертонах действующей силы или так называемый резонанс второго рода. Это расширение круга задач, решаемых методом малого параметра, было указано и развито академиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси (4).

В данной заметке я хочу указать на другое направление, в котором метод малого параметра также может быть плодотворным. Речь идет о включении в формулировку задач не только положительных, но и отрицательных порядков величин относительно малого параметра (μ), т. е. о введении, наряду с «нормальными» (или «большими») величинами порядка $\mu^0 = 1$ и «малыми» величинами порядка μ, μ^2 и т. д., также и «очень больших» величин порядка $1/\mu$, $1/\mu^2$ и т. д. Целесообразность этого будет проиллюстрирована ниже на конкретном примере, предварительно же следует отметить некоторые принципиальные моменты, касающиеся введения «очень больших» величин.

2. Введение величин порядка, скажем, $1/\mu$ с формальной стороны не приводит к чему-либо новому в методе малого параметра. Всегда можно повысить порядок коэффициентов дифференциальных уравнений — в данном случае на единицу ($1/\mu \to 1$, $1 \to \mu$, $\mu \to \mu^2$ и т. д.) — и тогда уравнения будут содержать, как обычно, лишь положитель-

ные порядки малости. Более того, такая замена (умножение на μ уравнений, содержащих $1/\mu$) даже необходима, так как само применение метода Пуанкаре уже предполагает, что μ входит в уравнения лишь в положительных степенях.

Однако оперирование «очень большими» величинами не тривиально с физической точки зрения и может принести существенную пользу при формулировке определенных задач.

По самому смыслу метода малого параметра последний является переменной величиной. Говоря «μ мало», мы лишь в краткой форме выражаем то утверждение, что μ может быть всегда сделано настолько малым, что те или иные утверждения теории будут выполнены. При этом все параметры, с которыми мы имеем дело в данной задаче, распадаются на такие, которые при $\mu \to 0$ обращаются в нуль, на остающиеся при этом неизменными и, наконец, на неограниченно возрастающие. Введение этих последних в рассматривавшихся до сих пор задачах не представлялось ни необходимым, ни целесообразным.

Физические соображения, касающиеся свойств рассматриваемой системы и существа задачи, большей частью подсказывают нам соотношения порядков величин. Вопрос же о том, какие именно из этих величин мы примем за величины нулевого порядка, т. е. за неизменные, не зависящие от μ, является делом произвольного соглашения. Однако каждое из возможных соглашений такого рода равносильно выбору определенной физической картины, выбору определенного вида рассматриваемой системы при $\mu = 0$. Хотя формально все эти выборы и эквивалентны друг другу, но они отнюдь не являются равноценными в смысле их соответствия нашим физическим представлениям, а следовательно, и по своей эвристической силе.

Поясним эти соображения нижеследующим примером.

3. Возьмем два индуктивно связанных линейных контура. Уравнения для токов будут:

$$\left.\begin{aligned} L_1\ddot{I}_1 + \frac{1}{C_1} I_1 &= -R_1\dot{I}_1 - M\ddot{I}_2, \\ L_2\ddot{I}_2 + \frac{1}{C_2} I_2 &= -R_2\dot{I}_2 - M\ddot{I}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Предположим, что контуры связаны слабо и что затухание колебаний тоже мало. Тогда представляется естественным принять, что сопротивления R_1, R_2 и коэффициент взаимной индукции M — малые величины порядка μ, в то время как парциальные частоты имеют порядок 1:

$$L_1C_1 \text{ и } L_2C_2 \sim 1; \quad R_1, R_2 \text{ и } M \sim \mu. \qquad (2)$$

При $\mu \to 0$ система вырождается в два независимых консервативных контура.

Пусть, далее, нам известно, что первый контур обладает обычным для колебательных контуров волновым сопротивлением, а у второго контура это сопротивление чрезвычайно велико, как это имеет место, например, в эквивалентном контуре кварца. В соответствии с этим мы полагаем $\sqrt{L_1/C_1} \sim 1$ и $\sqrt{L_2/C_2} \sim 1/\mu$, откуда, в силу условий $L_1C_1 \sim 1$, $L_2C_2 \sim 1$, следует, что

$$L_1 \sim 1, \quad 1/C_1 \sim 1, \quad L_2 \sim 1/\mu, \quad 1/C_2 \sim 1/\mu. \qquad (3)$$

Согласно (2) и (3), можно ввести следующие обозначения для парциальных частот, показателей затухания и коэффициентов связи:

$$\begin{gathered} 1/L_1C_1 = \omega_1^2, \quad 1/L_2C_2 = \omega_2^2, \quad R_1/L_1 = 2\mu h_1, \quad R_2/L_2 = 2\mu^2 h_2, \\ M/L_1 = \mu\varkappa_1, \quad M/L_2 = \mu^2\varkappa_2, \end{gathered} \qquad (4)$$

где ω, h и $\varkappa$ имеют порядок 1. Уравнения (1) принимают тогда вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{I}_1 + \omega_1^2 I_1 &= -2\mu h_1 \dot{I}_1 - \mu\varkappa_1 \ddot{I}_2, \\ \ddot{I}_2 + \omega_2^2 I_2 &= -2\mu^2 h_2 \dot{I}_2 - \mu^2 \varkappa_2 \ddot{I}_1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, благодаря введению $L_2 \sim 1/\mu$, мы получили асимметрию уравнений не только в показателях затухания, но и в коэффициентах связи (асимметрия одних лишь показателей затухания могла бы быть получена в предположении $R_2 \sim \mu^2$ при $L_2 \sim 1$).

Очевидно, мы пришли бы к тем же уравнениям (5), приняв порядок коэффициентов в уравнениях (1) на единицу более высоким:

$$L_1 \sim \mu, \quad 1/C_1 \sim \mu, \quad L_2 \sim 1, \quad 1/C_2 \sim 1, \quad R_1,\ R_2 \text{ и } M \sim \mu^2.$$

Мы не вводим при этом «очень больших» величин, но вид системы при $\mu = 0$ принимаем уже иным: неизменным элементом являются теперь реактивные параметры второго контура, в первом же контуре мы имеем бесконечно большую емкость при бесконечно малой индуктивности. Как сказано, уравнения останутся те же самые, но если первый контур — обычный контур, состоящий из катушки и конденсатора, а второй — эквивалентный контур кварца, и если мы имеем в виду взаимодействие данного контура с различными кварцами, то все преимущества физической наглядности будут за первым из указанных выше выборов, при котором мы трактуем L_2 как величину порядка $1/\mu$.

4. В заключение приведем в качестве примера результаты рассмотрения конкретной задачи, формулировка которой опирается на соображения, аналогичные предшествующим. Несмотря на большую практическую важность вопроса о стабилизации частоты ламповых генераторов при помощи кварца, строгая ее теория, насколько я знаю, до сих пор дана не была. Между тем именно допущение у кварца «очень большой» индуктивности порядка $1/\mu$ позволяет дать такую теорию при помощи метода малого параметра. Это было выполнено мною совместно с А. М. Прохоровым и М. Е. Жаботинским*.

Для того чтобы быть по возможности ближе к примеру, приведенному в предыдущем разделе, я ограничусь здесь специальной схемой стабилизации — схемой затягивания. Отличие от линейной задачи состоит в том, что первый (обычный) контур будет теперь колебательным контуром самовозбужденного лампового генератора и лишь незначительно расстроен (в порядке μ) от частоты второго — кварца. Вместо уравнений (5) мы получим тогда уравнения

$$\left.\begin{aligned} \ddot{I}_1 + I_1 &= -\mu\theta_1 \dot{I}_1 - \mu\varkappa_1 \ddot{I}_2 + \mu I_a - \mu\Delta I_1, \\ \ddot{I}_2 + I_2 &= -\mu^2\theta_2 \dot{I}_2 - \mu^2\varkappa_2 \ddot{I}_1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где введено безразмерное время $t' = \omega t$, $\omega = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ — частота кварца, $\mu\theta_1 = R_1/L_1\omega$ и $\mu^2\theta_2 = R_2/E_2\omega$ — декременты, $\mu\varkappa_1 = M/L_1$ и $\mu^2\varkappa_2 = M/L_2$ — коэффициенты связи, μI_a — анодный ток лампы, зависящий через обратную связь от $\dot{I}_1$ и $\mu\Delta = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega^2} \approx 2\frac{\omega_1 - \omega}{\omega}$ — относительная расстройка контура и кварца.

Асимметрия порядков малости, имеющаяся в уравнениях (6) по той же причине ($L_2 \sim 1/\mu$), что и в линейных уравнениях (5), позволяет не только дать теорию стабилизации частоты, но и некоторое наглядное представление о характере процессов при стабилизации. А именно, если учитывать члены уравнений (6), следуя повышению порядка их малости, то в нулевом приближении ($\mu = 0$) система

* Готовится к печати.

представляет собой два независимых линейных и консервативных осциллятора, колеблющихся с одинаковой частотой. При учете первого порядка мы имеем самовозбужденный ламповый генератор, на который почти в резонанс (расстройка $\mu\Delta$) действует сила $-\mu\varkappa_1\ddot{I}_2$, т. е. это задача о захватывании автоколебательной системы внешней силой вблизи резонанса ([3]). Источником силы является второй осциллятор, попрежнему независимый и консервативный. Наконец, при учете второго порядка одновременно появляются затухание кварца и поддерживающее его колебания воздействие генератора (сила $-\mu^2\varkappa_2\ddot{I}_1$). Таким образом, взаимодействие асимметрично: генератор действует на кварц очень слабо ($\sim\mu^2$) в соответствии с малым декрементом кварца ($\sim\mu^2$), но кварц действует на генератор «сильно» ($\sim\mu$) и поэтому может захватывать его вблизи резонанса.

Эта наглядная интерпретация, связывающая стабилизацию с захватыванием, представляется мне не лишенной интереса и небесполезной.

Строгое решения уравнение (6) методом малого параметра* дает явление затягивания ([5], [6]), отличающееся той особенностью, что в определенных областях расстройки $\mu\Delta$ существует решение с частотой n, разнящейся от частоты кварца 1 лишь в порядке μ^2:

$$n = 1 - \mu^2 \frac{\theta_2}{2}\left[\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{2\theta_2\Delta} + \sqrt{\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{2\theta_2\Delta}\right)^2 - 1}\right].$$

В этом и состоит стабилизация частоты по отношению к расстройке: при изменении последней в порядке μ частота колебаний меняется лишь в порядке μ^2, а не в том же порядке μ, как это происходит в нестабилизированном режиме или в системах с обычными контурами.

Наряду с этим и все остальные параметры схемы входят в частоту лишь через поправку второго порядка малости. Существенным является при этом то обстоятельство, что в указанном стабилизированном режиме частотная поправка второго порядка не содержит параметров лампы. Следовательно, зависимость частоты от режима питания отодвигается по крайней мере в третий порядок, в отличие от нестабилизированных схем и режимов, в которых крутизна характеристики лампы входит в n уже во втором порядке.

Лаборатория колебаний
Физического института им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
25 IX 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I, 1897, p. 79. [2] А. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1935. [3] А. Андронов и А. Витт, Журн. Прикл. Физ., 7, 3 (1930). [4] Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 2, 755 (1932). [5] А. Андронов и А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934). [6] С. Беллюстин, Учен. зап. Горьковск. гос. ун-та, 12, 197 (1939).

* С. М. Рытов, А. М. Прохоров и М. Е. Жаботинский, готовится к печати.