Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 8

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ А. Н. КОЛМОГОРОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VIII 1944)

Пусть $\sigma(\lambda)=\sigma(\lambda-0)$ $(-\infty<\lambda<\infty, \sigma(-\infty)=0)$ — некоторая ограниченная неубывающая функция, а L_σ — гильбертово пространство всех σ-измеримых и σ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $\varphi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ с обычным определением скалярного произведения:

$$(\varphi, \psi)_\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) \quad (\varphi, \psi \in L_\sigma).$$

Через $L_\sigma(E)$, где E — некоторое множество вещественных чисел t, мы обозначим линейную замкнутую оболочку в L_σ всех элементов $\exp(it\lambda)\in L_\sigma$, где $t\in E$.

А. Н. Колмогорову принадлежит постановка общей проблемы* из теории стационарных случайных функций, которая сводится к следующей аналитической проблеме: (К) даны два множества вещественных чисел E_1 и E_2. Какому условию должна удовлетворять неубывающая ограниченная функция $\sigma(\lambda)=\sigma(\lambda-0)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ для того, чтобы $L_\sigma(E_1)=L_\sigma(E_2)$.

Для случая, когда E_1 — последовательность всех целых (положительных и отрицательных) чисел, меньших данного, а E_2 — последовательность всех целых чисел, равно как и для случая, когда E_1 состоит из конечного числа последовательных целых чисел, а E_2 — последовательность всех прочих целых чисел, проблема (К) была решена в 1939 г. А. Н. Колмогоровым ([1]) (подробное решение см. ([2], [3]))**.

В том же году, решая проблему продолжения эрмитово-положительных функций, автор попутно (вне всякой связи с исследованиями А. Н. Колмогорова) получил решение проблемы (К) для случая, когда E_1 — конечный интервал, а E_2 — вся бесконечная вещественная ось, однако за недостатком места ([4]) не сформулировал его. В настоящее время решение проблемы (К) для этого случая (и несколько более общей проблемы) указано автором в конце его заметки ([5]) о проблеме продолжения винтовых линий в гильбертовом пространстве.

А. Н. Колмогоров обратил внимание автора на особый интерес, который представляет проблема (К) для случая, когда E_1 есть полу-

---

* Сформулирована А. Н. Колмогоровым в письме к автору.

** Для второго случая А. Н. Колмогоров опубликовал решение при условии, что E_1 состоит лишь из одного целого числа ([2], [3]).

прямая, а $E_2 (\supset E_1)$ — вся вещественная ось. Ниже приводится решение проблемы (К) для этого случая*, получающееся как следствие решения некоторого более общего вопроса (см. теорему 1 и ее следствие).

1. Обозначим через H_ζ класс всех голоморфных внутри верхней полуплоскости функций $\varphi(\zeta)$ $(I\zeta > 0)$ таких, что $|\varphi(\zeta)|^2$ имеет в этой полуплоскости гармоническую мажоранту. Голоморфная функция $\varphi(\zeta)$ $(I\zeta > 0)$ принадлежит классу H_ζ в том и только том случае, если функция

$$f(z) = \varphi(\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = i\frac{1-z}{1+z}, \quad z = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \quad (|z| < 1)$$

принадлежит классу H_z, где через H_z обозначен класс всех голоморфных функций $f(z)$ $(|z| < 1)$ таких, что

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots, \quad \text{где} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Другое необходимое и достаточное условие, чтобы функция $\varphi(\xi) \in H_\zeta$, заключается в том, что $(\zeta + i)^{-1}\varphi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$ *, где через $\mathfrak{H}_\zeta$ обозначен класс всех голоморфных функций $\psi(\zeta)$ $(I\zeta > 0)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda + i\mu)|^2 d\lambda < M_\psi < \infty, \quad \mu > 0.$$

Каждая функция $\varphi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$ почти везде на вещественной оси имеет предельные значения $\varphi(\lambda)$, к которым она стремится по любым некасательным путям. То же, конечно, относится и к функциям $\psi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$.

Через H_λ (соответственно H_θ и $\mathfrak{H}_\lambda$) мы обозначим множество всех граничных функций для функций $\varphi(\zeta) \in H_\zeta$ (соответственно $f(z) \in H_z$ и $\psi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$).

В дальнейшем L_λ означает некоторое линейное множество функций из L_σ, обладающее следующими свойствами: 1) $1 \in L_\lambda$; 2) если $\varphi(\lambda) \in L_\lambda$, то $\exp(it\lambda)\varphi(\lambda) \in L_\lambda$ при $t \geqslant 0$.

Теорема 1. *Множество $L_\lambda \subset L_\sigma$ не плотно в L_σ в том и только в том случае, когда выполнены два условия:*

a)
$$-\infty < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \sigma'(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda \quad (< \infty). \tag{1}$$

b) *существует функция $\Gamma(\lambda) \in H_\lambda$ такая, что* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(\lambda)|^2}{\sigma'(\lambda)} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} < \infty$ *и $\Gamma(\lambda)\varphi(\lambda) \in H_\lambda$ при любом $\varphi \in L_\lambda$.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{L}_\lambda$ замыкание L_λ в L_σ. В силу 2) если $\varphi \in \overline{L}_\lambda$, то также $\exp(it\lambda)\varphi(\lambda) \in \overline{L}_\lambda$ при $t \geqslant 0$. А так как каждая функция $p(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ вида:

$$p(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda)\, q(t)\, dt, \quad \text{где} \int_{-\infty}^{\infty} |q(t)|\, dt < \infty \tag{2}$$

---

* При этом без ограничения общности мы предполагаем, что E_1 есть положительная полуось $t \geqslant 0$.

** Это предложение можно, например, усмотреть из теорем VII, IX статьи В. И. Крылова (6).

является пределом некоторой равномерно сходящейся в каждом конечном интервале и равномерно ограниченной последовательности тригонометрических полиномов $P_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вида:

$$P_n(\lambda) = \sum a_k^{(n)} \exp(it_k^{(n)}\lambda) \quad (t_k^{(n)} \geqslant 0),$$

то вместе с $\varphi \in \overline{L}_\lambda$ также $p(\lambda)\varphi(\lambda) \in \overline{L}_\lambda$.

В частности, полагая в (2) $c = -1$, $q(t) = \exp(-t)$ $(-\infty < t < \infty)$, получаем $p(\lambda) = (i - \lambda)(i + \lambda)^{-1}$, и, следовательно,

$$\frac{i-\lambda}{i+\lambda}\varphi(\lambda) \in \overline{L}_\lambda, \text{ если } \varphi(\lambda) \in \overline{L}_\lambda. \tag{3}$$

Положим

$$\tau(\theta) = \sigma(\operatorname{tg}(\theta/2)) \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{4}$$

и рассмотрим гильбертово пространство L_τ всех τ-измеримых и τ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $g(\theta)$ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Очевидно, что преобразование

$$g(\theta) = \varphi(\lambda), \quad \lambda = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$$

устанавливает линейное изометрическое соответствие T $(g = T\varphi)$ между L_σ и L_τ.

Пусть $L_\theta = TL_\lambda$, и значит, $\overline{L}_\theta = T\overline{L}_\lambda$ ($\overline{L}_\theta$ — замыкание L_θ в L_τ), В силу свойств 1) и 3) совокупности L_λ $1 \in L_\theta$ и, если $g \in L_\theta$, то $e^{i\theta}g(\theta) \in L_\theta$. А следовательно. по теореме 1 нашей заметки ([7]), L_θ не плотно в L_τ в том и только в том случае, если

α) $$-\infty < \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log \tau'(\theta)\, d\theta,$$

β) существует функция $G(\theta) \in H_\theta$ такая, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|G(\theta)|^2}{\tau'(\theta)}\, d\theta < \infty$$

и $G(\theta)g(\theta) \in H_\theta$ при любом $g(\theta) \in L_\lambda$.

Но если $\overline{L}_\theta \neq L_\tau$, то $\overline{L}_\lambda \neq L_\sigma$ и обратно; с другой стороны, в силу (4) условие a) эквивалентно условию α), а условие β)—условию b), если иметь в виду преобразование $G(\theta) = \Gamma(\lambda)$ $(\lambda = \operatorname{tg}\theta/2)$, преобразование (4) и сказанное ранее о классах H_θ и H_λ.

Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы линейная оболочка L_λ^+ множества функций $\exp(it\lambda) \in L_\sigma$ $(t \geqslant 0)$ не была плотной в L_σ, необходимо и достаточно, чтобы функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяла условию (1).

2. При выполнении условий a), b) теоремы 1 или, что то же, условий α), β), на основании теоремы 2 ([6]) можно утверждать, что существует сходящееся произведение Бляшке

$$B(z) = z^p \prod \frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\,\frac{|a_k|}{a_k} \quad (p \geqslant 0, \ 0 < |a_k| < 1, \ k = 1, 2, \ldots)$$

такое, что значения каждой функции $B(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$ $(f(e^{i\theta}) \in L_\theta)$ почти всюду совпадают с предельными значениями некоторой мероморфной внутри единичного круга функции ограниченного вида. Кроме того, если $B(z)$ выбрать так, чтобы оно не имело «лишних» нулей, и положить

$$F_\tau(z) = \sqrt{2\pi}B(z)\exp\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log\tau'(\theta)\,d\theta\right), \tag{5}$$

то функция $F_\tau(z)$ будет обладать следующими свойствами:

I'. $F_\tau(z) \in H_z$, $F_\tau(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \in H_\theta$ при любом $f(e^{i\theta}) \in L_\theta$.

II'. $\tau'(\theta) = \frac{1}{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2$ (почти всюду).

III'. Если положить: $\Phi_\tau(e^{i\theta}) = F^{-1}(e^{i\theta})$ в точках θ, где $F_\tau(e^{i\theta}) \neq 0$ и существует конечная производная $\tau'(\theta)$, и $\Phi_\tau(e^{i\theta}) = 0$ в прочих точках, то $\Phi_\tau(e^{i\theta}) \in \overline{L}_\theta$.

Полагая $\sqrt{2} F_\tau(z) = (\zeta + i) D(\zeta)$, $B(z) = b(\zeta)$, $z = \frac{i - \zeta}{i + \zeta}$ $(I\zeta < 0)$, из (4), (5) получим

$$D(\zeta) = \sqrt{2\pi}\, b(\zeta) \exp\left(\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda\zeta}{\lambda - \zeta} \frac{\log \sigma'(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda\right). \tag{6}$$

В силу I'—III' будем иметь:

I. $D(\zeta) \in H_\zeta$, $D(\lambda) \varphi(\lambda) \in H_\lambda$ при любом $\varphi(\lambda) \in \overline{L}_\lambda$.

II. $\sigma'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |D(\lambda)|^2$ (почти всюду).

III. Если положить $Q(\lambda) = (i + \lambda)^{-1} D^{-1}(\lambda)$ для тех λ, где $D'(\lambda) \neq 0$ и существует конечная производная $\sigma'(\lambda)$, и $Q(\lambda) = 0$ при прочих λ, то $Q(\lambda) \in \overline{L}_\lambda$.

Так как $D(\zeta) \in H_\zeta$, то (см. [8])

$$D(\zeta) = \int_0^\infty \exp(i\zeta t)\, \gamma(t)\, dt, \quad D(\lambda) = \underset{A \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-A}^{A} \exp(it\lambda)\, \gamma(t)\, dt,$$

где $\gamma(t) = \underset{A \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \exp(-i\lambda t)\, \gamma(t)\, dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |D(\lambda)|^2 d\lambda$.

Теорема 2*. *Расстояние $d(s)$ $(s > 0)$ элемента* $\exp(is\lambda)$ *от* L *в метрике пространства L_σ находится по формуле*

$$d(s) = \int_0^s |\gamma(t)|^2 dt \quad (s > 0).$$

Из-за недостатка места мы вынуждены опустить доказательство теоремы 2.

Замечание. Из правила построения $B(z)$ и $b(\zeta)$ вытекает, что если L_λ есть L_λ^+, т. е. линейная оболочка элементов $\exp(it\lambda)$ $(t \geqslant 0)$, то в (6) следует положить $b(s) \equiv 1$. В этом случае, легко видеть, $d(s) > 0$ при всех $s > 0$.

Полученные нами результаты можно истолковать как некоторые предложения, относящиеся к проблеме продолжения полубесконечных унитарных линий ξ_t $(-\infty < t \leqslant a)$ (см. [5]). Эти предложения обобщаются на случай полубесконечных винтовых линий.

Куйбышевский индустриальный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
20 IV 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, C. R., **208**, 2043 (1939). [2] А. Н. Колмогоров, Бюллетень МГУ, **2**, 6 (1941). [3] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. мат., **5**, № 1 (1941). [4] М. Г. Крейн, ДАН, XXVI, № 1 (1940). [5] М. Крейн, ДАН, XLV, № 4 (1944). [6] В. И. Крылов, Математ. сб., **6** (48), 1, 95 (1939). [7] М. Крейн, ДАН, XLVI, № 3 (1945). [8] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, N. Y., 1934.

* Ср. с теоремой 2 статьи А. Н. Колмогорова ([2]).