Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. И. ПЕТРАШЕНЬ

КОЛЕБАНИЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ШАРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 III 1944)

В настоящей заметке рассматриваются задачи на собственные и вынужденные колебания упругого шара методом сферических векторов. В отличие от предшествовавших авторов (1), дается полное решение задачи.

1. Вектор смещения $\mathbf{u}$, определяющийся из решений уравнения

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

при заданных на поверхности $r=R$ шара смещениях

$$\mathbf{u}(R,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\mathbf{u}_0(\theta,\ \varphi,\ t) \tag{2}$$

либо напряжениях

$$\lambda\mathbf{r}_1\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+2\mu\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r}+\frac{1}{2}[\mathbf{r}_1\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}]\right)\Bigg|_{r=R}=\mathbf{F}(\theta,\ \varphi,\ t) \tag{3}$$

будем представлять в виде суммы

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \tag{4}$$

где $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_1=0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_2=0$.

Тогда вместо (1) за исходные можно принять следующие волновые уравнения

$$\Delta\mathbf{u}_1-a^2\frac{\partial^2\mathbf{u}_1}{\partial t^2}=0,\qquad \Delta\mathbf{u}_2-b^2\frac{\partial^2\mathbf{u}_2}{\partial t^2}=0, \tag{5}$$

где $a^2=\rho/(\lambda+2\mu)$, $b^2=\rho/\mu$.

Ищем решения в виде разложения по шаровым векторам (3):

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_1=\sum_{\substack{l=1\\|m|\leqslant l}}^{\infty}\left\{\Phi_{lm}^{+1}(r,\ t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{+1}+\Phi_{lm}^{-1}(r,\ t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{-1}\right\},\\ \mathbf{u}_2=\sum_{\substack{l=1\\|m|\leqslant l}}^{\infty}\left\{\varphi_{lm}^{0}(r,\ t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{0}+f_{lm}^{+1}(r,\ t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{+1}+f_{lm}^{-1}(r,\ t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{-1}\right\},\end{gathered} \tag{6}$$

и в виде таких же разложений представим векторы, заданные на границе:

$$\mathbf{u}_0=\sum_{\substack{l=0\\|m|\leqslant l}}^{\infty}a_{lm}^{0}(t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{0}+a_{lm}^{+1}(t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{+1}+a_{lm}^{-1}(t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{-1}, \tag{7}$$

$$\mathbf{F}=\sum_{\substack{l=0\\|m|\leqslant l}}^{\infty}F_{lm}^{0}(t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{0}+F_{lm}^{+1}(t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{+1}+F_{lm}^{-1}(t)\,\mathbf{Y}_{lm}^{-1}. \tag{8}$$

Подставляя значения векторов (6) в уравнения (5), а также в граничные условия (2) и (3), приходим к задаче интегрирования уравнений для радиальных функций:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{lm}^{\nu}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \Phi_{lm}^{\nu}}{\partial r}-\frac{(l+\nu)(l+1+\nu)}{r^2}\Phi_{lm}^{\nu}=a^2\frac{\partial^2 \Phi_{lm}^{\nu}}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 f_{lm}^{\nu}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f_{lm}^{\nu}}{\partial r}-\frac{(l+\nu)(l+1+\nu)}{r^2}f_{lm}^{\nu}=b^2\frac{\partial^2 f_{lm}^{\nu}}{\partial t^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{lm}^{0}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \varphi_{lm}^{0}}{\partial r}-\frac{(l+\nu)(l+1+\nu)}{r^2}\varphi_{lm}^{0}=b^2\frac{\partial^2 \varphi_{lm}^{0}}{\partial t^2}, \tag{11}$$

где $\nu=\pm 1$, при следующих граничных условиях:

$$\varphi_{lm}^{0}(R,\ t)=a_{lm}^{0}(t),\ \Phi_{lm}^{\nu}(R,\ t)+f_{lm}^{\nu}(R,\ t)=a_{lm}^{\nu}(t) \tag{12}$$

в случае заданных на поверхности смещениях и условиях:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\left(\frac{\partial \varphi_{lm}^{0}}{\partial r}-\frac{\varphi_{lm}^{0}}{r}\right)\Bigg|_{r=R}=F_{lm}^{0}(t),\\
&\lambda\left(\frac{\partial \Phi_{lm}^{+1}}{\partial r}+\frac{l+2}{r}\Phi_{lm}^{+1}\right)-\mu\left(\frac{\partial f_{lm}^{+1}}{\partial r}+\frac{l+2}{r}f_{lm}^{+1}\right)+\\
&\qquad+2\mu\left(\frac{\partial \Phi_{lm}^{+1}}{\partial r}+\frac{\partial f_{lm}^{+1}}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R}=F_{lm}^{+1}(t),\\
&\lambda\left(\frac{\partial \Phi_{lm}^{-1}}{\partial r}-\frac{l-1}{r}\Phi_{lm}^{-1}\right)-\mu\left(\frac{\partial f_{lm}^{-1}}{\partial r}-\frac{l-1}{r}f_{lm}^{-1}\right)+\\
&\qquad+2\mu\left(\frac{\partial \Phi_{lm}^{-1}}{\partial r}+\frac{\partial f_{lm}^{-1}}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R}=F_{lm}^{-1}(t),
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

если на поверхности заданы напряжения.

Радиальные функции Φ_{lm}^{+1} и Φ_{lm}^{-1}, так же как и функции f_{lm}^{+1} и f_{lm}^{-1}, в силу условий (4), не являются независимыми, а связаны друг с другом дифференциальными соотношениями (5) и (7) нашей заметки ([3]). Наличие этих соотношений позволяет рассматривать уравнения (9) и (10) лишь при одном значении ν (например $\nu=-1$), так как второе уравнение оказывается следствием первого и указанных дополнительных условий.

2. Определим все типы гармонических колебаний шара с поверхностью, свободной от напряжений. Представляя смещение в виде

$$\mathbf{u}(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\mathbf{u}(r,\ \theta,\ \varphi)\,e^{\pm i\nu t}$$

и подставляя его выражение в (1), приходим к задаче на собственные значения для уравнения $(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_n+\mu\Delta\mathbf{u}_n+\rho\nu_n^2\mathbf{u}_n=0$ при граничных условиях (3), правая часть которых равна нулю. Собственные векторы $\mathbf{u}_n$ такой задачи образуют в области шара полную ортогональную систему ([4]).

Для решения задачи по методу шаровых векторов нужно подставить в уравнения (9), (10) и (11) выражения радиальных функций с выделенной гармонической зависимостью от времени, найти решения получающихся при этом уравнений, конечные в начале координат и удовлетворяющие дополнительным условиям (5) и (7) из ([3]), и затем подставить эти решения в граничные условия (13), правые части которых равны нулю. При этом оказывается, что граничные условия удовлетворяются одним лишь (lm)-м членом разложений (6). Отбрасывая множитель $e^{\pm i\nu t}$ при радиальных функциях, а также значки l и m, нетрудно видеть, что радиальные функции представляются следующими формулами:

$$\text{при } l=0:\ \varphi_0^0=f_0^{+1}=f_0^{-1}=\Phi_0^{-1}=0;\quad \Phi_0^{+1}=c_0\Psi_1(k_1 r); \tag{14}$$

$$\text{при } l\geqslant 1 \text{ и любом } m:\ f^{-1}=(l+1)\,b\Psi_{l-1}(k_2 r);\quad \Phi^{-1}=c\Psi_{l-1}(k_1 r); \tag{15}$$

$$\varphi^0=a\Psi_l(k_2 r);\quad f^{+1}=lb\Psi_{l+1}(k_2 r);\quad \Phi^{+1}=-c\Psi_{l+1}(k_1 r),$$

где $k_1=\nu\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}$, $k_2=\nu\sqrt{\rho/\mu}$, а Ψ—функция, определяющаяся равенством

$$\Psi_l(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{-1/2}J_{l+\frac{1}{2}}(x). \tag{16}$$

Подстановка радиальных функций (14) и (15) в граничные условия показывает, что существуют три типа колебаний, частоты которых определяются из известных уравнений [1], а собственные векторы представляются следующими формулами:

1. Радиальные колебания

$$\mathbf{u}_{0n}=c_n\Psi_1(k_1{}^n r)\,\mathbf{r}_1. \tag{17}$$

2. Колебания первого класса (по терминологии Lamb'a)

$$\mathbf{u}_{lmp}=a_{lmp}\Psi_l(k_2{}^p r)\,\mathbf{Y}_{lm}^0. \tag{18}$$

3. Колебания второго класса

$$\mathbf{u}_{lmq}=d_{lmq}\left\{\left[\frac{l}{l+1}A_2\Psi_{l+1}(k_2{}^q r)-C_l\Psi_{l+1}(k_1{}^q r)\right]\mathbf{Y}_{lm}^{+1}+\right.$$
$$\left.+\left[A_l\Psi_{l-1}(k_2{}^q r)+C_l\Psi_{l-1}(k_1{}^q r)\right]\mathbf{Y}_{lm}^{-1}\right\}, \tag{19}$$

где A и C_l имеют следующие значения:

$$A_l=k_1{}^q\left[2\mu\frac{l-1}{k_1{}^q R}\Psi_{l-1}(k_1{}^q R)-(\lambda+2\mu)\Psi_l(k_1{}^q R)\right],$$
$$C_l=\mu(l+1)k_2{}^q\left[\Psi_l(k_2{}^q R)-\frac{2(l-1)}{k_2{}^q R}\Psi_{l-1}(k_2{}^q R)\right],$$

а k_ν^n, k_ν^p и k_ν^q (при $\nu=1$ и 2) — значения величин k_1, k_2, когда в их выражения подставлены соответствующие частоты колебаний.

Собственные векторы (17), (18) и (19) образуют полную систему.

3. Совершенно так же может быть рассмотрена задача на собственные колебания закрепленной сферы. Так же устанавливаются три типа колебаний, собственные векторы которых лишь немного отличаются от предыдущих в случае колебаний второго класса.

Частоты же колебаний определяются из следующих уравнений:

1. Радиальные колебания $J_{\frac{3}{2}}(k_1{}^n R)=0.$ (20)

2. Колебания первого класса $J_{l+\frac{1}{2}}(k_2{}^p R)=0.$ (21)

3. Колебания второго класса:

$$(l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(k_1{}^q R)J_{l-\frac{1}{2}}(k_2{}^q R)+lJ_{l+\frac{3}{2}}(k_2{}^q R)J_{l-\frac{1}{2}}(k_1{}^q R)=0. \tag{22}$$

Все заключения о полноте решений остаются в силе.

Заметим, что методом шаровых векторов без труда решаются задачи на собственные колебания шарового слоя $0<\varepsilon\leqslant r\leqslant R$ при граничных условиях обоих типов.

4. Рассмотрим решение уравнения (1) в случае шара $r\leqslant R$ при нулевых начальных данных и граничных условиях (2) или (3). При этом будем предполагать, что заданные на сфере векторы подчинены следующим требованиям: $\mathbf{u}_0(\theta,\varphi,t)$ непрерывно относительно t

и обращается в нуль при $t=0$; $\mathbf{F}(\theta, \varphi, t)$ кусочно-непрерывно относительно времени.

Как следует из пункта 1, решение такой задачи методом шаровых векторов очень близко к решению задачи, рассмотренной в ([3]). Чтобы воспользоваться полученными там результатами, нужно лишь учесть условия (5) и (7) из ([3]), связывающие радиальные функции Φ_{lm}^{+1} и Φ_{lm}^{-1}, а также f_{lm}^{+1} и f_{lm}^{-1} друг с другом. Нетрудно проверить, что при учете этих условий радиальные функции задачи могут быть представлены в следующем виде:

при $l=0$:
$$\Phi_0^{+1}=\frac{1}{r}\int\limits_{t-aR-ar}^{t-aR+ar}\Phi_0(\tau)\frac{\tau+aR-t}{ar}\,d\tau;$$

при $l\geqslant 1$ и любом m $\varphi^0=\frac{1}{r}\int\limits_{t-bR-br}^{t-bR+br}\varphi(\tau)P_l\left(\frac{\tau+bR-t}{br}\right)d\tau;$

$$\Phi^{+1}=\frac{1}{r}\int\limits_{t-aR-ar}^{t-aR+ar}\Phi(\tau)P_{l+1}\left(\frac{\tau+aR-t}{ar}\right)d\tau;$$

$$f^{+1}=\frac{l}{r}\int\limits_{t-bR-br}^{t-bR+br}f(\tau)P_{l+1}\left(\frac{\tau+bR-t}{br}\right)d\tau, \tag{23}$$

$$\Phi^{-1}=\frac{1}{r}\int\limits_{t-aR-ar}^{t-aR+ar}\Phi(\tau)P_{l-1}\left(\frac{\tau+aR-t}{ar}\right)d\tau;$$

$$f^{-1}=-\frac{l+1}{r}\int\limits_{t-bR-br}^{t-bR+br}f(\tau)P_{l-1}\left(\frac{\tau+bR-t}{br}\right)d\tau,$$

где значки l и m для краткости опущены.

Эти радиальные функции соответствуют представлению вектора смещения и в классе решений уравнения (1) с возможными правильными сильными разрывами ([3]). Полученное решение задачи удовлетворяет условиям теоремы единственности.

Если функции от τ, входящие в (23), обращаются в нуль при $\tau<0$, то начальные данные будут выполнены. Чтобы удовлетворить граничным условиям (2), нужно решить следующие интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода:

при $l=0$ $\quad \Phi_0(t)+\Phi_0(t-t_a)-\frac{1}{aR}\int\limits_{t-t_a}^{t}\Phi_0(\tau)\,d\tau=Ra_0^{+1}(t);$

при $l\geqslant 1$ и любом m:

$$\varphi(t)-(-1)^l\varphi(t-t_b)-\frac{1}{bR}\int\limits_{t-t_b}^{t}\varphi(\tau)P_l'\left(\frac{\tau+bR-t}{bR}\right)d\tau=Ra^{0'}(t),$$

$$\Phi(t)+(-1)^l\Phi(t-t_a)+l[f(t)+(-1)^l f(t-t_b)]-$$
$$-\frac{1}{aR}\int\limits_{t-t_a}^{t}\Phi(\tau)P_{l+1}'\left(\frac{\tau+aR-t}{aR}\right)d\tau-$$
$$-\frac{l}{bR}\int\limits_{t-t_b}^{t}f(\tau)P_{l+1}'\left(\frac{\tau+bR-t}{bR}\right)d\tau=Ra^{+1}(t),$$

$$\Phi(t) + (-1)^l \Phi(t - t_a) - (l+1)\,[f(t) + (-1)^l f(t - t_b)] -$$

$$- \frac{1}{aR} \int_{t-t_a}^{t} \Phi(\tau)\, P'_{l-1}\left(\frac{\tau + aR - t}{aR}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{l+1}{bR} \int_{t-t_b}^{t} f(\tau)\, P'_{l-1}\left(\frac{\tau - bR - t}{bR}\right) d\tau = Ra^{-1}(t),$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу функции. В случае граничных условий (3) имеем подобные же уравнения, с несколько более сложными ядрами и с правыми частями, содержащими функции $F^{\tau}_{lm}(t)$.

Первые два уравнения ничем не отличаются от рассмотренных в ([3]). Система же двух последних уравнений более сложна из-за необходимости учета двух постоянных $t_a = 2aR$ и $t_b = 2bR$ в методе последовательных шагов. Если $t < t_a$, то эта система приводится к следующему каноническому виду:

$$\Phi(t) - \frac{1}{aR} \int_0^t \Phi(\tau) \left[\frac{\tau + aR - t}{aR} P_l'\left(\frac{\tau + aR - t}{aR}\right) + P_l\left(\frac{\tau + aR - t}{aR}\right) \right] d\tau -$$

$$- \frac{l(l+1)}{bR} \int_0^t f(\tau)\, P_l\left(\frac{\tau + bR - t}{bR}\right) d\tau = R\, \frac{(l+1)\, a^{+1}(t) + la^{-1}(t)}{2l+1},$$

$$f(t) - \frac{1}{aR} \int_0^t \Phi(\tau)\, P_l\left(\frac{\tau + aR - t}{aR}\right) d\tau -$$

$$- \frac{1}{bR} \int_0^t f(\tau)\, \frac{\tau + bR - t}{bR}\, P_l'\left(\frac{\tau + bR - t}{bR}\right) d\tau = R\, \frac{a^{+1}(t) - a^{-1}(t)}{2l+1}$$

и решается обычными методами. При $t > t_a$, введя соответствующие обозначения, левую часть можно оставить без изменения, в правые же части добавятся члены, содержащие значения функций $\Phi(t)$ и $f(t)$ в предшествующие моменты времени, характеризующие отражения упругих волн от поверхности шара. То же имеет место и в случае граничных условий (3).

Ленинградская военно-воздушная Академия
Красной Армии

Поступило
8 III 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ляв, Математ. теория упругости, М.-Л., 1935, стр. 290. [2] В. И. Смирнов, ДАН, XIV, 9 (1937). [3] Г. И. Петрашень, ДАН, XLVI, № 7 (1944). [4] H. Weyl, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, XXXIX, 1, 1 (1915).