Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

ГИДРОДИНАМИКА

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

К ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 I 1945)

§ 1. Уравнения для осредненных величин, описывающих турбулентное движение несжимаемой вязкой жидкости, полученные впервые О. Рейнольдсом (1) путем осреднения точных уравнений гидродинамики, можно записать в компактной и удобной для обозрения форме следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{D\vec{\bar c}}{Dt} &= \rho\vec F-\Delta(\bar p+\Pi)+k\Delta\vec{\bar c}-\frac{\partial\Pi'_{ik}}{\partial x}, \\ \operatorname{div}\vec{\bar c} &= 0, \\ \frac{3}{2}\frac{D\Pi}{Dt} &= k\Psi+\operatorname{div}\vec P-\Pi'_{ik}\frac{\partial\bar u}{\partial x_i}-\operatorname{div}\vec I, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем здесь введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi\equiv\frac{1}{3}\rho\overline{c'^2}, \quad \vec I\equiv\frac{1}{2}\rho\overline{\vec c'\,c'^2}, \quad \Pi_{ik}'\equiv\overline{\rho u'_i u'_k}-\Pi\delta_{ik}, \\ &\vec P\equiv\overline{\vec c' p}, \quad \Psi\equiv\overline{\left(\vec c',\Delta\vec c'\right)}, \quad \frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{\bar c},\Delta\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $u'_i\equiv u_i-\bar u_i$ — компоненты относительной скорости $\vec{c'}$ (скорости турбулентных пульсаций); Π — турбулентное давление, равное $^2/_3$ средней кинетической энергии турбулентных пульсаций (аналога температуры); $\vec I$ — плотность потока кинетической энергии турбулентных пульсаций (аналог теплового тока); $-\operatorname{div}\vec P$ — дополнительная средняя работа, совершаемая в единицу времени давлением p благодаря турбулентным пульсациям через границы элементарного объема, движущегося с осредненной скоростью $\vec{\bar c}$; $k\Psi$ — превышение рассеиваемой в тепло кинетической энергии турбулентных пульсаций (в указанном объеме в единицу времени) над средней работой поверхностных сил трения (от обычной вязкости), производимой турбулентными пульсациями на границе элементарного объема.

Под осреднением (обозначаемым чертой сверху) надо понимать две операции: во-первых, арифметическое среднее по малой области, линейные размеры которой определяются характерной длиной $\bar l$ — средней длиной «пути перемешивания» по Л. Прандтлю (2), и, во-вторых, среднее арифметическое по времени за промежуток τ — минимальное время осреднения, после которого изменения осредненной величины принимают регулярный характер (перестают быть случайными). В данном определении осреднения элементарный объем и элементарный интервал τ надо понимать одинаковыми для всего потока, а именно равными наибольшим значениям $\overline{l}^3$ и τ, встречающимся в потоке (наименьшие будут нули при допущении ламинарного пограничного слоя). Но для всех турбулентных потоков это будет хорошим приближением. Потоки, для которых это имеет место, мы будем называть потоками «одномасштабной турбулентности». Таким образом, мы здесь исключаем из рассмотрения атмосферную турбулентность, для которой характерно наличие многих $\overline{l}$ (многих «масштабов») различного порядка величины. Закономерности, которые мы будем рассматривать, это закономерности в ограниченных потоках (например в трубах). Систему пяти уравнений (1) назовем фундаментальными уравнениями феноменологической теории одномасштабной турбулентности несжимаемой вязкой жидкости. Отметим характерную ситуацию, имеющую место в каждой феноменологической теории: число функций в фундаментальных уравнениях превышает число уравнений. Основной задачей теории является дополнение фундаментальных уравнений, которое сделало бы задачу нахождения входящих в них функций определенной.

§ 2. Дополнение фундаментальных уравнений не надо производить дифференциальными же уравнениями. Мы считаем опытным фактом, возводя его в ранг физического принципа, что число независимых граничных условий равно числу фундаментальных уравнений. Из этого принципа вытекает существование пяти — по числу фундаментальных уравнений — основных независимых величин. Мы предполагаем, что эти величины суть: $\overline{u}_i$, p, Π, остальные же величины, а именно $\Pi'_{ik}, \vec{l}, \vec{P}, \Psi$, должны выражаться через основные, поэтому их будем называть приводимые величины. Дополнение фундаментальных уравнений надо произвести, выражая приводимые величины через основные; эти выражения будем называть динамическими уравнениями состояния. Общим предположением о математическом типе уравнений состояния является следующее: значение приводимой величины в каждой точке системы определяется значениями основных величин во всей системе, т. е. видом функций; иными словами, значения приводимых величин суть функционалы от основных. Поэтому общей формой уравнения состояния является интегральная форма. Однако для обширного класса движений зависимость значения приводимой величины в точке (x) от значений основных величин в точках (ξ) быстро убывает с возрастанием расстояния $(\xi - x)$. Поэтому, в первом приближении, интегральные уравнения состояния можно заменить дифференциальными. Если ограничиться заданием основных величин в точке (x) и на «первой бесконечно близкой сфере» вокруг нее, то через величины

$$\overline{u}_i,\quad p,\quad \Pi,\quad \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k},\quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\quad (i, k = 1, 2, 3), \tag{3}$$

которые будем называть независимыми величинами первого приближения, можно выразить приводимые величины, т. е. построить уравнения состояния в первом приближении. Эти уравнения будут иметь ограниченную годность, и можно посредством неравенств, наложенных на изменения основных величин в потоке (или на их граничные значения), определить область их применимости. Уравнения состояния во втором приближении надо строить, используя вторые производные от основных величин.

§ 3. Феноменологическая теория при составлении уравнений состояния руководствуется, во-первых, общими соображениями инвариантности, симметрии и наибольшой простоты и, во-вторых, соображениями подобия (анализом размерностей). Эти общие соображения недостаточны для полной определенности результатов, их нужно дополнять апелляцией к опыту. Также в конечных результатах теории содержатся неопределенные постоянные, значения которых надо брать из опыта. Феноменологическая теория пригодна для первого теоретического оформления опытного материала, более глубокое и точное оформление может дать лишь статистическая теория. Феноменологические соображения указанного типа приводят к следующим уравнениям состояния первого приближения (построенным из величин (3)):

$$\left.\begin{aligned} \Pi'_{ik} &= -\varepsilon_1 \Pi \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i}\right); \quad \vec{I} = -\varepsilon_2 \Pi \nabla \Pi; \\ \vec{P} &= -\varepsilon_3 \Pi \nabla \overline{p}; \quad \Psi = \frac{3}{2\rho} \Delta \Pi - g_1 \Pi - g_2 \Pi^{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(в выражении для Ψ первым членом можно пренебречь). Здесь коэффициенты ε_1, ε_2, ε_3, g_1, g_2 суть постоянные, которые из анализа размерностей можно свести к пяти безразмерным коэффициентам, численные значения которых будут одни и те же для всех подобных потоков и которые, вообще, суть функции от числа Рейнольдса (определяемые из опыта). Число коэффициентов — в пределах феноменологической теории — может быть уменьшено до трех.

§ 4. Существует аналогия между полем турбулентных пульсаций скорости и молекулярно-хаотическим движением. Существует явление «турбулентного переноса», аналогичное молекулярно-хаотическому переносу, которое можно выразить формулой

$$\vec{S} = -\varepsilon' \overline{c'} l \nabla \overline{R}. \tag{5}$$

$\vec{S}$ — плотность потока переносимой величины R. С помощью представления об «испускающем слое» (введенном в кинетическую теорию Клаузиусом и Майером) и «жидком протуберанце» мы даем следующее толкование входящих в (5) величин: l — длина жидкого протуберанца (который «вырвался» из испускающего слоя), отсчитываемая от места вырывания до места, где «иссякла его главная часть». Место «вырывания» — это место, где в данный момент времени пульсационная скорость имеет максимум (местный, сравнительно с ближайшими точками). l — это «путь перемешивания» по Прандтлю. Этот путь — длина протуберанца — зависит от скорости, с которой он вырвался. Путь будет тем больше, чем больше эта скорость. Естественно принять степенную зависимость. Для средней длины $\overline{l}$ мы принимаем простейшую зависимость — линейную: $\overline{l} \sim \overline{c'}$. При этом формуле турбулентного переноса (5) можно придать следующий вид:

$$\vec{S} = -\varepsilon \Pi \nabla \overline{R}. \tag{6}$$

$\overline{R}$ — переносимая величина, осредненная в том месте, откуда вырвался протуберанец. Данное здесь определение $\overline{l}$ — средней длине протуберанца — примыкает к представлению Тейлора ([3]), который дает аналогичной величине следующее определение: среднее перемещение «элемента турбулентности» от своего исходного уровня, где он находился в равновесии со своим окружением, до слоя, в котором он рассеивается (определение, которое Ричардсон называет загадочным, так как среди хаоса турбулентных движений нет ни исходного покоя, ни конечной остановки). Формула (6) основана на определении $\bar{l}$ как «главной части» длины, определенной Тейлором, которая и осуществляет главную часть турбулентного переноса. Наше определение $\bar{l}$ противостоит определению пути перемешивания, даваемому с помощью «средней длины волны», опирающемуся на волновое соотношение $\omega\lambda = v$. Наиболее характерным фактом в явлениях турбулентности является **перемешивание** масс жидкости — явление, которое никак не может быть описано волновым процессом. Наше определение не опирается на представление о волновых процессах. Переносимые жидким протуберанцем величины, вообще, по пути рассеиваются; этот факт может быть учтен множителем ε в формуле (6), который будет иметь свое численное значение для каждой переносимой величины. Уравнения состояния для Π'_{ik}, $\vec{I}$, $\vec{P}$, непосредственно полученные из кинетического уравнения (6), совпадают с уравнениями (4), полученными из формальных феноменологических соображений.

§ 5. Уравнения состояния (4), подставленные в систему (1), дают пять уравнений для нахождения пяти основных величин: $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{p}$, Π. Этим построена полная система уравнений, описывающих одномасштабную турбулентность несжимаемой вязкой жидкости. Остается лишь формулировать граничные условия. Для $\bar{u}_i$ и $\bar{p}$ они такие же, как в обычной гидродинамике. Для Π они однозначно вытекают из очевидного физического требования: энергия турбулентных пульсаций не проникает в твердые тела, ограничивающие жидкость. Поэтому I_n — нормальный компонент потока энергии на границе с твердыми телами равен нулю, что равносильно:

$$\Pi\,|_{\text{у стенки}} = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|_{\text{у стенки}} = 0. \tag{7}$$

Первое условие имеет место при ламинарном граничном слое, а второе — при турбулентном.

После окончания мною моей работы я ознакомился с работой академика А. Н. Колмогорова ([4]), и первая редакция моей настоящей заметки содержала некоторую критику уравнений, предложенных А. Н. Колмогоровым. Последний, прочитав мою заметку при ее представлении в ДАН, указал, что мои замечания относительно его уравнений имеют своим источником тот факт, что его уравнения приведены с опечатками, и просил меня исправить эти опечатки. Вот его уравнения в исправленном виде:

$$\frac{D\bar{v}_i}{Dt} = F_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{p}}{\rho} + b\right) + A\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{b}{\omega}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{a}$$

$$\sum \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \tag{b}$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\frac{7}{10}\omega^2 + A'\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{b}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right], \tag{c}$$

$$\frac{Db}{Dt} = -b\omega + \frac{A}{3}\frac{b}{\omega}\varepsilon + A''\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{b}{\omega}\frac{\partial b}{\partial x_j}\right], \tag{d}$$

где $\omega = c\dfrac{\sqrt{b}}{L}$, c — постоянная, $b = \rho^{-1}\Pi$ и L — «внешний масштаб» турбулентности — «путь перемешивания».

Система уравнений (a), (b), (d) А. Н. Колмогорова формально совпадает с моей системой (1), (4), если в ней (в первой) положить $\omega = \mathrm{const}$, однако так как уравнение (c) А. Н. Колмогорова не позволяет сделать это, то между обеими системами имеется существенное различие.

Решение системы (1), (4) для стационарного потока приводит к формулам, согласным с экспериментом. Это решение составит предмет отдельного сообщения.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность академику В. И. Смирнову за обсуждение различных вопросов, возникавших в ходе работы.

Ленинградский государственный университет

Поступило 25 I 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Reynolds, Phil. Trans. Roy. Soc. (1895). [2] L. Prandtl, V. D. I., 77, No. 5 (1933). [3] C. J. Taylor, Phil. Trans. A., 215, (1915). [4] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ., VI, № 1—2 (1942).