Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

НОРМИРУЕМОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 VI 1944)

§ 1. И. Шафаревич дал критерий нормируемости топологического поля K [1]. При этом под нормой элемента $x \in K$ автор понимает функцию $\| x \|$, удовлетворяющую следующим условиям:

а) $\| x \| > 0$ при $x \neq \theta$ и $\| \theta \| = 0$.

б) $\| x \cdot y \| = \| x \| \cdot \| y \|$.

в) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

г) Множества $\{ \| x \| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \}$ образуют полную систему окрестностей θ.

Мы будем под нормой в топологическом кольце K* понимать функцию $\| x \|$, удовлетворяющую условиям а), в), г), а вместо условия б) потребуем следующее:

$$\text{б}')\ \| x \cdot y \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \| .$$

Ограниченным мы будем называть множество $W \subset K$, которое удовлетворяет условию: для каждой окрестности U нуля можно указать окрестность V нуля так, чтобы $WV \subset U$.

Под R мы будем понимать совокупность всех тех элементов $x \in K$, для которых $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = \theta$.

Наконец, множество $W \subset K$ будем называть выпуклым, если для каждых двух элементов $x, y \in W$ найдется элемент $z \in W$ такой, что $2z = x + y$, и всякий такой элемент $z \in K$ принадлежит W.

Используя метод И. Шафаревича, докажем следующее:

Теорема 1. *Если множество R открыто, ограничено, выпукло и содержит элемент p, имеющий обратный, то топологическое кольцо K нормируемо.*

Доказательство. Пусть $p \in R$ и имеет обратный в K.

Легко доказать, что при таком элементе p совокупность окрестностей $\{ p^n \cdot R \}$ полная.

Докажем теперь, что теоретико-множественная сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{-n} \cdot R$ совпадает с K. Действительно, для всякого $x \in K$ найдется n, при котором $p^n \cdot x \in R$, а значит $x \in p^{-n} \cdot R$. Заметив, что множества $p^n \cdot R$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ охватывают друг друга, убывая в порядке роста

* Под топологическим кольцом я понимаю совокупность элементов K, удовлетворяющую следующим условиям: α) K — алгебраическое, коммутативное кольцо с единицей. β) K — топологическое пространство. γ) Множества $x + U$ образуют полную систему окрестностей x, если U пробегает полную систему окрестностей θ. δ) Если $x \in K$ и U — окрестность θ, то можно указать окрестность θ V так, чтобы $x \cdot V \subset U$. ε). Если $p \subset K$ имеет обратный и U — окрестность θ, то $p \cdot U$ — окрестность θ.

номера, мы заключаем о возможности введения понятия индекса элемента $x \in K$.

Функцию $n(x)$, равную наибольшему n, при котором $x \in p^n \cdot R$, назовем индексом элемента x; очевидно, $-\infty < n(x) < +\infty$.

Из выпуклости R следует неравенство:

$$n\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \operatorname{Min}[n(x);\ n(y)]. \tag{1}$$

Так как $R \cdot R \subseteq R$, то

$$n(x \cdot y) \geqslant n(x) + n(y). \tag{2}$$

Опираясь на то обстоятельство, что если степень элемента принадлежит R, то и сам элемент принадлежит R, используя неравенство (2), получаем:

$$(n+1)\,k \geqslant n(x^k), \tag{3}$$

где $n = n(x)$ и $k = 1, 2, 3, \ldots$

Из неравенств (2) и (3) следует:

$$1 \geqslant \alpha_k(x) - n(x) \geqslant 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

где обозначено $\alpha_k(x) = n(x^k)/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Из неравенства (4) следует существование предела последовательности $\{\alpha_k(x)\}$. Обозначим $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k(x) = \alpha(x)$. Функция $\rho^{\alpha(x)}$ при $0 < \rho < 1$ удовлетворяет а), б′), г), а также следующему условию:

$$\text{в}')\ \rho^{\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right)} \leqslant [\rho^{\alpha(x)} + \rho^{\alpha(y)}] \cdot \rho^{-1}.$$

Неравенство в′) следует из неравенств (1) и (4). Исходя из

$$0 \leqslant \alpha(x) - n(x) \leqslant 1, \tag{5}$$

нетрудно проверить условие г). Условия а) и б′) очевидны.

Условие в) для функции $\rho^{\alpha(x)}$ не выполняется, но, опираясь на в′), можно легко проверить:

$$\rho^{\alpha(x+y)} \leqslant \rho^c [\rho^{\alpha(x)} + \rho^{\alpha(y)}],$$

где $c = \alpha(2) - 1$.

Функция $\| x \| = \rho_1{}^{\alpha(x)}$, где $\rho_1 = \rho \dfrac{1}{1 + a_\rho}$, $a_\rho = \sup \dfrac{\rho^{\alpha(x+y)}}{\rho^{\alpha(x)} + \rho^{\alpha(y)}}$, удовлетворяет всем условиям а), б′), в), г) нормы в топологическом кольце. Этим теорема доказана.

Исходя из условия г) для $\rho^{\alpha(x)}$ и неравенства (5), получаем:

Теорема 2. *Функция $\rho^{n(x)}$ имеет тот же рост (относительно x), что и любая норма, определяющая топологию кольца.*

Замечание. Элемент p в определении $n(x)$ может быть заменен линейным оператором P в K, имеющим обратный и удовлетворяющим условию:

$$\lim_{n \to \infty} P^n x = \theta \text{ для всех } x \in K.$$

Приведем два примера приложения приведенных теорем.

1. Топологию кольца считаем определенной нормой, заданной функцией $\operatorname{Max}\limits_{M \in \mathfrak{M}_0} |x(M)|$, где $\mathfrak{M}_0$ есть такое замкнутое подмножество множества $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов полного нормированного кольца K (2), для которого $x(M) = 0$ для всех $M \in \mathfrak{M}_0$ влечет $x = \theta$.

2. Кольцо целых функций с обычным умножением и топологией, заданной системой окрестностей нуля $\{M(r;\ f) < \varepsilon\}$, где $M(r;\ f) = \operatorname{Max}\limits_{|z| \leqslant r} |f(z)|$. Здесь каждому r соответствует своя топология.

§ 2. Сохраняя предыдущие обозначения, будем считать, что в K имеет место аксиома: если U — окрестность θ, то можно указать окрестность θ — V так, чтобы $V + V \subset U$. Как метрическое пространство K, вообще говоря, неполно. Как обычно, K возможно дополнить, вводя в рассмотрение пространство классов $\overline{K}$ фундаментальных последовательностей. Если последовательность x_m — представитель класса $\overline{x} \in \overline{K}$, то мы определяем $\| \overline{x} \|$ равенством: $\| \overline{x} \| = \lim\limits_{m \to \infty} \| x_m \|$.

Нетрудно проверить, что после естественного введения понятий «сумма» и «произведение» классов* $\overline{K}$ оказывается нормированным, полным кольцом, плотным подкольцом которого является K.

В частности, интересен случай, когда $\overline{K}$ содержит поле комплексных (или действительных) чисел; при этом $\overline{K}$ является нормированным кольцом в смысле И. М. Гельфанда ([2]).

Нетрудно заметить, что при той норме в K, которую мы ввели в § 1, будет выполняться: $\| x^m \| = \| x \|^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

Отсюда вытекает, что

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} | x(M) | = \| x \|,$$

где $\mathfrak{M}$ — множество максимальных идеалов в $\overline{K}$ (если $\overline{K}$ является кольцом Гельфанда).

Таким образом, $\overline{K}$ может рассматриваться как полное кольцо функций, непрерывных на бикомпакте $\mathfrak{M}$.

С другой стороны, если $\mathfrak{M}$ — бикомпакт, а K — плотное подкольцо полного кольца непрерывных функций на $\mathfrak{M}$, то множество $\left\{ \max\limits_{M \in \mathfrak{M}} | x(M) | < 1,\ x \in K \right\}$ есть множество R в K, если K рассматривать как топологическое кольцо с топологией, даваемой окрестностями $\theta \left\{ \max\limits_{M \in \mathfrak{M}} | x(M) | < \varepsilon \right\}$. В результате получается:

Теорема 3. *Класс L топологических колец K, содержащих поле рациональных комплексных (или действительных) чисел и в которых множества R (элементы которых удовлетворяют условию $\lim\limits_{m \to \infty} x^m = \theta$) открыты, выпуклы и ограничены, совпадает с классом L_1 плотных подколец K_1 полных, линейных колец функций, непрерывных на некотором бикомпакте $\mathfrak{M}$, если окрестности θ в K_1 имеют вид: $\left\{ \max\limits_{M \in \mathfrak{M}} | x(M) | < \varepsilon,\ x \in K_1 \right\}$.*

§ 3. Обозначим через $\tilde{R}$ совокупность всех элементов топологического кольца K, удовлетворяющих условию $e \,\overline{\in}\, xR$ (см. ([1])).

Имеет место теорема:

Теорема 4. *Если K содержит множество комплексных (или действительных) чисел, $\tilde{R}$ ограничено, а R открыто и выпукло, то K есть поле комплексных (или действительных) чисел.*

Поступило
29 VI 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Шафаревич, ДАН, XL, № 4 (1943). [2] И. М. Гельфанд, Матем. сб., **9** (51), № 1 (1941).

* Если фундаментальные последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ являются представителями классов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, то $\{x_m + y_m\}$ и $\{x_m \cdot y_m\}$ оказываются фундаментальными последовательностями, и мы их принимаем в качестве представителей классов $\overline{x} + \overline{y}$ и $\overline{x} \cdot \overline{y}$.