Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ОПЕРАЦИИ СДВИГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1944)

Д. А. Райков показал [1], пользуясь теорией нормированных колец, что теорема S. Bochner'a о представлении положительно определенных функций может быть обобщена на случай коммутативных групп с инвариантной мерой. В настоящей заметке будет показано, что метод Райкова распространяется на операции обобщенного сдвига [3].

Пусть T^s — семейство операторов обобщенного сдвига*. Пусть $p(t)$ — ограниченная непрерывная функция на Z. Мы будем предполагать в дальнейшем, что для $p(t)$ определено семейство сопряженных операторов $\tilde{T}^s$ из условия

$$\int \tilde{T}_t^s p(t)\, x(t)\, dm(t) = \int p(t)\, T_t^s x(t)\, dm(t), \quad x(t) \in L.$$

Пусть $|\tilde{T}_t^s p(t)| \leqslant A_p \sup\limits_{t \in Z} |p(t)|$ [A может зависеть от $p(t)$] и $\tilde{T}_t^s p(t)$ непрерывная функция по совокупности переменных t, s.

Определение. Непрерывная функция $p(t)$ называется положительно определенной, если она ограничена и если для любых точек $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Z$ и любых комплексов чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{T}_{ti}^{tj} p(t)\, \rho_i \bar{\rho}_j \geqslant 0. \tag{1}$$

Из (1) с помощью одного приема F. Riesz'a [2] следует

$$\int\int \tilde{T}_t^s p(t)\, x(t)\, \overline{x(s)}\, dm(t)\, dm(s) \geqslant 0, \quad x(t) \in L. \tag{2}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $|p(t)| \leqslant C_1$ (C_1 из условия V обобщенного сдвига). Остальные случаи приводятся к этому.

Положим для всякого элемента $\zeta = \lambda e + x(t) \in R$

$$\mathrm{L}(\zeta) = \lambda + \int p(t)\, x(t)\, dm(t).$$

Функционал L аддитивен и однороден. Покажем, что $\mathrm{L}(\tilde{\zeta}) = \overline{\mathrm{L}(\zeta)}$. Из (1) следует, что $p(t)$ «эрмитова» функция, т. е. $\tilde{T}_t^s p(t) = \tilde{T}_s^t \overline{p(s)}$.

* По поводу обозначений и понятий см. [3].

Далее, имеем

$$\mathrm{L}(\tilde{\zeta})=\overline{\lambda}+\int p(s)\,dm(s)\lim_{n\to\infty}\int \tilde{T}_t^s\overline{x(t)}\,x_n(t)\,dm(t)=$$

$$=\overline{\lambda}+\int p(s)\,dm(s)\lim_{n\to\infty}\int \overline{x(t)}\,T_t^s x_n(t)\,dm(t)=$$

$$=\overline{\lambda}+\int \overline{x(t)}\,dm(t)\lim_{n\to\infty}\int \tilde{T}_t^s\overline{p(t)}\,x_n(s)\,dm(s)=\overline{\lambda}+\int\overline{p(t)}\,\overline{x(t)}\,dm(t)=\overline{\mathrm{L}(\zeta)}.$$

При этом мы предполагаем, что для $p(t)$ выполняется условие I обобщенного сдвига.

Теорема 1. L *есть позитивный линейный функционал в пространстве* C, *причем* $\|\mathrm{L}\|=1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$|\mathrm{L}(\zeta)|\leqslant\|\zeta\|.$$

Далее имеем

$$x*\tilde{y}=\int \tilde{T}_t^s x(t)\left[\lim_{n\to\infty}\int\tilde{T}_u^s\overline{y(u)}\,x_n(u)\,dm(u)\right]dm(s)=$$

$$=\int\overline{y(u)}\,dm(u)\lim_{n\to\infty}\int\tilde{T}_t^s x(t)\,T_s^u x_n(s)\,dm(s).$$

В силу формулы (4) заметки ([3]) имеем

$$x*\tilde{y}=\int\overline{y(u)}\,dm(u)\lim_{n\to\infty}\int\tilde{T}_t^s T_t^u x(t)\,x_n(s)\,dm(s)=$$

$$=T_t^u x(t)\,\overline{y(u)}\,dm(u).$$

Отсюда, в силу (2),

$$\mathrm{L}(x*\tilde{x})=\int p(t)\left[\int T_t^u x(t)\,\overline{x(u)}\,dm(u)\right]dm(t)=$$

$$=\int\int\tilde{T}_t^u p(t)\,x(t)\,\overline{x(u)}\,dm(t)\,dm(u)\geqslant 0.$$

В дальнейшем доказательство теоремы совпадает с доказательством Д. А. Райкова ([1]) с заменой функций $y(g)$ на $x_n(t)$.

Теорема 2. *Непрерывная положительно определенная функция* $p(t)$ *представима в виде*

$$p(t)=\int_{\mathfrak{M}-M_0}\overline{\varphi(\alpha,\ t)}\,dF(\alpha),$$

где $F(\Delta)$ *вполне аддитивная функция на борелевских множествах локально компактного пространства* $\mathfrak{M}-M_0$.

Доказательство дословно переносится со случая групп ([1]).

Пусть A_t — семейство коммутативных нормальных равномерно ограниченных операторов, зависящих от элемента t пространства Z и определенных в некотором гильбертовом пространстве H.

Рассмотрим скалярное произведение

$$h(t)=(A_t f,\ g)\quad (f,\ g\in H)$$

и предположим, что $h(t)$ непрерывная функция от t.

Предположим, что существует такая операция обобщенного сдвига T^s, что для любых $f,\ g\in H$

$$T_t^s h(t)=(A_s A_t f,\ g),\quad \tilde{T}_t^s h(t)=(\tilde{A}_s A_t f,\ g). \tag{3}$$

Так, например, если Z—абелева группа, то достаточно предполагать, что A_t образуют группу унитарных операторов.

Непосредственной подстановкой проверяется, что $f(t) = (A_t f, f)$ есть позитивная функция. Следовательно,

$$(A_t f, f) = \int \overline{\varphi(\alpha, t)}\, dF(\alpha). \tag{4}$$

Из формулы (4), а также единственности представления известным приемом ([2]) получаем спектральную формулу

$$(A_t f, g) = \int \overline{\varphi(\alpha, t)}\, d(E_\alpha f, g). \tag{5}$$

Здесь E_Δ — разложение единицы, т. е. удовлетворяет условиям:
1) $E_\theta = 0$ (θ — пустое множество, 0 — нулевой оператор).
2) $E_{\mathfrak{M} - M_0} = E$ (E — единичный оператор).
3) $E_{\Delta'} E_{\Delta''} = E_{(\Delta' \Delta'')}$.
4) $A_t E_\Delta = E_\Delta A_t$.

Формулой (5) мы будем пользоваться в другой работе при доказательстве теоремы Plancherel'я.

Заметим, что $\sup\limits_{\alpha} \varphi(\alpha, t) = \| A_t \|$. Отсюда следует ограниченность $\varphi(\alpha, t)$ по совокупности переменных α, t.

Артиллерийская ордена Ленина Академия
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
27 V 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Райков, ДАН, XXVIII, № 4 (1940). [2] F. Riesz, Acta Szegod, 6 (1933).
[3] Б. Левитан, ДАН, XLVII, № 1 (1945).