Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 1

ГИДРОДИНАМИКА

Академик Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН

ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Вопрос о ламинарном и турбулентном движении газа в пористой среде поставлен нами впервые и решение его дано в нашей работе (1) 1929 и 1930 гг. Полученный нами степенной закон фильтрации газа через пористую среду был дан в нашей монографии (2) по подземной гидравлике в 1934 г. Здесь этот закон фильтрации дан в совершенно общем виде. Мы будем пользоваться обозначениями и результатами главы XIII нашей монографии (2).

Формулы (14), (15), (25) и (26) дают следующее выражение нашего степенного закона (1) для скорости фильтрации газа в пористой среде по оси Ox, в предположении турбулентного движения и политропного процесса изменения состояния газа:

$$\gamma u = A_1 f(m)\,\varphi d^{3s-1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^s, \qquad (1)$$

$$\varphi = \mu g\,(\beta g \mu^2)^{-s}. \qquad (2)$$

В случае структуры пористой среды по схеме Слихтера имеем

$$f(m) = f_1 = (1-m)^{-s}(n)^{\frac{3s+1}{2}}, \qquad (3)$$

а в случае структуры по схеме Козени

$$f(m) = f_2 = m^{3s}(1-m)^{1-3s}. \qquad (4)$$

A_1 — число, зависящее от структуры среды и показателя политропы

$$p = (\beta\gamma)^{k_1}, \qquad (5)$$

оно может быть вычислено, но его следует определить из опыта; γ — удельный вес газа; ρ — его плотность; g — ускорение тяжести, причем имеем

$$\gamma = g\rho; \qquad (6)$$

μ — коэффициент абсолютной вязкости газа; m — порозность; n — просвет по обозначению Слихтера; d — так называемый средний эффективный диаметр частицы пористой среды; β — газовая постоянная. Показатель s стеснен неравенствами:

$$^1/_2 \leqslant s \leqslant 1;$$

случай $s=1$ дает ламинарную фильтрацию.

Для турбулентной фильтрации обычно принимают $s={}^1/_2$, но Смрекер для турбулентной фильтрации воды предложил $s={}^2/_3$.

Далее обозначено

$$P = p^{1+\frac{1}{k_1}}. \qquad (7)$$

Вводя обозначения

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho d u}{\mu}, \tag{8}$$

$$\sigma = f(m), \tag{9}$$

$$\omega_1 = \frac{d^3}{\beta g \mu^2} \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{10}$$

замечаем, что Re — число Рейнольдса; σ — безразмерная величина, называемая числом Слихтера; ω_1 — безразмерная величина.

Внося (2) и (6) в (1), мы при введенных обозначениях получим найденный нами ([1]) степенной закон в виде

$$\mathrm{Re} = A_1 \sigma \omega_1{}^s. \tag{11}$$

Внося (7) в (10), мы имеем

$$\omega_1 = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\omega, \tag{12}$$

где ω есть безразмерная величина

$$\omega = \frac{\rho d^3}{\mu^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{13}$$

которую мы назовем **числом фильтрации**.

Вместо числа A_1 вводим число A при помощи соотношения

$$A = A_1 \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)^s. \tag{14}$$

Тогда (11) примет окончательный вид

$$\mathrm{Re} = A \sigma \omega^s. \tag{15}$$

Эта форма степенного закона фильтрации сама собою обобщается в виде

$$\mathrm{Re} = F(\omega), \tag{16}$$

что представляет **самую общую** форму закона фильтрации при движении в одном измерении (по оси Ox).

Обратно, из (16) имеем соотношение

$$\omega = \Phi(\mathrm{Re}), \tag{17}$$

гласящее, что число фильтрации есть функция числа Рейнольдса.

Соотношения (15), (16) и (17) при $\rho = \mathrm{const}$ имеют место для несжимаемой жидкости.

Формула (16) получается из начала размерности.

Действительно, примем

$$\mathrm{Re} = \sum_\alpha B_\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta, \tag{18}$$

где все B_α суть числа. Очевидно, каждый член правой части (18) есть безразмерная величина, что дает

$$\alpha + \gamma + \delta = 0, \quad -2\alpha + \beta - 3\gamma - \delta = 0, \quad -2\alpha - \delta = 0;$$

отсюда имеем

$$\beta = 3\alpha, \quad \gamma = \alpha, \quad \delta = -2\alpha. \tag{19}$$

Внося (19) в (18), мы, в силу (13), получим

$$\mathrm{Re} = \sum B_\alpha \omega^\alpha, \tag{20}$$

что согласуется с (16).

Введем обозначения

$$D = d^3/\mu^2, \tag{21}$$

$$q(p) = \int \rho(p)\, dp + \text{const}, \tag{22}$$

$$\Delta_1 q = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2, \tag{23}$$

$$\theta(p) = \frac{F\left(D\sqrt{\Delta_1 q}\right)}{\sqrt{\Delta_1 q}}, \tag{24}$$

при этом предполагается, что ρ есть известная функция давления p. Например, ρ может быть определено из формулы (5) в случае политропного процесса. Для компонентов скорости фильтрации по осям координат имеем

$$\frac{\rho du}{\mu} = \theta \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\rho dv}{\mu} = \theta \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\rho dw}{\mu} = \theta \frac{\partial q}{\partial z}. \tag{25}$$

В случае несжимаемой жидкости имеем

$$q = \rho_0 p + \text{const}, \tag{26}$$

где ρ_0 есть постоянная плотность жидкости. Формулы (25) должно внести в уравнение неразрывности в пористой среде

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{27}$$

что дает дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка относительно q, так как из (22) имеем

$$\rho = f(q), \tag{28}$$

где $f(q)$ есть известная функция q.

Интегрирование этого уравнения при заданных граничных и начальном условии решает задачу о движении газа или несжимаемой жидкости при ламинарном и турбулентном режимах.

В частном случае степенного закона (15) мы будем иметь:

$$\frac{F\left(D\sqrt{\Delta_1 q}\right)}{\sqrt{\Delta_1 q}} = \frac{A\sigma D^s}{(\Delta_1 q)^{\frac{1-s}{2}}}, \tag{29}$$

что приводит к формулам, данным нами ранее ([3]).

Институт теоретической геофизики Академии Наук СССР

Поступило 28 I 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Нефтяное хозяйство, № 10 (1929); № 8/9 (1930). [2] Л. С. Лейбензон, Подземная гидравлика воды, нефти и газа, М., 1934. [3] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геофиз. и географ., № 1 (1945).