Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. ШТОКАЛО

ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА НА СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 IV 1944)

Как известно, одним из основных фактов, делающих возможным приложение символического метода Гивзайда к системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$dx/dt = Ax + F(t), \tag{1}$$

является то, что для $F(t)$, имеющей вид

$$F(t) = Ce^{pt},$$

система уравнений (1) допускает частное решение вида:

$$x = (pE - A)^{-1} Ce^{pt},$$

где E — единичная матрица.

Представляется интересным обобщить этот результат на случай систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Рассмотрим систему уравнений вида:

$$dx/dt = A(t)\,x + Ce^{pt}, \tag{2}$$

где $A(t)$ — n-мерная матрица, x и C — n-мерные вектора и p — некоторое комплексное число.

Пусть s_k будут корни алгебраического уравнения

$$\mathrm{Det}\,\| pE - A_0 \| = 0$$

и пусть

$$d(p) = \min |R(s_k - p)| \geqslant \alpha.$$

Пользуясь указанными обозначениями, имеем:

При заданной n-мерной матрице A_0 можно сопоставить любым заданным положительным N и α такое $K > 0$, что система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = [A_0 + \varepsilon f(t)]x + Ce^{pt},$$

в которой на всей вещественной оси

$$|f(t)| \leqslant N,$$

а p и ε являются комплексными величинами, удовлетворяющими неравенству

$$|\varepsilon| \leqslant d(p)/k, \tag{3}$$

имеет единственное решение вида

$$x = \xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt}.$$

Множитель $\xi(t, p, \varepsilon)$ *является ограниченной на всей вещественной оси функцией от* t, *аналитической относительно параметров* p *и* ε *в области, определяемой неравенством* (3).

В случае, когда $f(t)$ *почти периодическая функция,* $\xi(t, p, \varepsilon)$ *также почти периодическая функция от* t, *с тем же частотным базисом.*

Отсюда вытекает следующая теорема, дающая возможность обобщения указанного результата также и на системы, не содержащие малого параметра ε.

Любому положительному N *можно сопоставить такое* $L > 0$, *что имеет место утверждение: система дифференциальных уравнений* (2), *в которой на всей вещественной оси*

$$|A(t)| \leq N \quad \text{и} \quad |R(p)| \geq L,$$

имеет единственное решение вида

$$x = \xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt},$$

где $\xi(t, p, \varepsilon)$ — *функция, ограниченная относительно* t *в интервале* $(-\infty, +\infty)$ *и аналитическая относительно параметров* p *и* ε *в области* (3).

В случае, если $A(t)$ *почти периодическая функция,* $\xi(t, p, \varepsilon)$ *является также почти периодической функцией от* t *с тем же частотным базисом.*

По нашему мнению, полученные результаты могут служить отправной точкой обобщения основной формулы символического метода на случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Поступило
10 IV 1944