Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННОЙ ОПЕРАЦИЕЙ СДВИГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1944)

И. М. Гельфанд и Д. А. Райков (1) с успехом применили созданную И. М. Гельфандом (2) теорию нормированных колец к изучению коммутативных топологических групп. При этом в их методе важную роль играет операция умножения в кольце (свертывание). В настоящей заметке теми же методами будет показано, что с каждой коммутативной операцией обобщенного сдвига* связано некоторое нормированное кольцо. В дискретном случае, когда оператор обобщенного сдвига задан с помощью кубической матрицы, из наших результатов следуют результаты А. Haar'а (3).

1. Пусть Z — локально компактное пространство со второй аксиомой счетности и $m(\Delta)$ нигде не тривиальная [для всякого открытого множества U, $m(U)>0$] мера в нем. Через $L_p\,(p\geqslant 1)$ обозначим совокупность всех числовых функций, определенных на Z, для которых

$$\int\limits_Z |f(t)|^p\, dm(t)<\infty.$$

В дальнейшем нас будут интересовать случаи $p=1$ и $p=2$. Интегралы по всему Z будем писать без индекса внизу.

Предположим, что в линейных пространствах функций L_p $(p\geqslant 1)$ определено семейство операторов T^s, зависящих от элемента $s\in Z$. Таким образом каждой функции $f(t)$ из рассматриваемых классов ставится в соответствие функция от двух переменных $K(s, t)= T_t^s f(t)$.

Через $\tilde{T}^s$ обозначим совокупность сопряженных операторов, определяемых равенством

$$\int T_t^s f(t)\, g(t)\, dm(t)=\int f(t)\, \tilde{T}_t^s g(t)\, dm(t).$$

Предполагается, что интегралы существуют почти для всех s.

2. Пусть выполнены следующие условия, которые в дальнейшем кратко будем называть условиями обобщенного сдвига.

I. Существует такая бесконечная последовательность равномерно ограниченных по норме в L_1 функций $x_n(t)\in L_{1,2}$, $\int |x_n(t)|\, dm(t) < A$ (A от n не зависит), что для любой $f(t)\in L_p$

$$\lim_{n\to\infty}\int T_t^s f(t)\, x_n(t)\, dm(t)=f(s),\quad \lim_{n\to\infty}\int \tilde{T}_t^s f(t)\, x_n(s)\, dm(s)=f(t),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int \tilde{T}_t^s f(t)\, x_n(t)\, dm(t)\in L_p.$$

Сходимость предполагается по норме в L_p.

* Операция обобщенного сдвига впервые введена в рассмотрение J. Delsartes'ом. Этим же понятием я пользуюсь в (6).

II. Линейность:

$$T_t^s[af(t)+bg(t)] = aT_t^s f(t) + bT_t^s g(t),$$

f, $g \in L_p$, a, b — комплексные числа.

III. $T_s^r T_t^s f(t) = T_t^s T_t^r f(t)$ (ассоциативность).

IV. Коммутативность и нормальность:

$$T_t^s T_t^r f(t) = T_t^r T_t^s f(t), \quad \tilde{T}_t^s T_t^r f(t) = T_t^r \tilde{T}_t^s f(t).$$

V. Ограниченность операторов T^s:

$$\left[\int |T_t^s f(t)|^p \, dm(t)\right]^{1/p} \leqslant C_p \left[\int |f(t)|^p \, dm(t)\right]^{1/p},$$

$$\left[\int |\tilde{T}_t^s f(t)|^p \, dm(t)\right]^{1/p} \leqslant C_p^* \left[\int |f(t)|^p \, dm(t)\right]^{1/p},$$

где C_p и C_p^* от s и $f(t)$ не зависят.

VI. Непрерывность операторов T^s: если $f(t) \in L_p$, то каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $s \in Z$, можно указать такую окрестность U точки s, что

$$\int |T_t^s f(t) - T_t^{s'} f(t)|^p \, dm(t) < \varepsilon^p, \quad \int |\tilde{T}_t^s f(t) - \tilde{T}_t^{s'} f(t)|^p \, dm(t) < \varepsilon^p,$$

если $s' \in U$.

VII. Вещественность операторов T^s: если $f(t)$ — вещественная функция, то и $T_t^s f(t)$ — вещественная функция.

Следствие I. $T_t^s \overline{f(t)} = \overline{T_t^s f(t)}$. Действительно, в силу вещественности и линейности операторов T^s

$$T_t^s \overline{f(t)} = T_t^s[\overline{f_1(t) + if_2(t)}] = T_t^s f_1(t) - iT_t^s f_2(t) = \overline{T_t^s f(t)}.$$

Следствие II. Не нарушая общности, можно принять $x_n(t)$ из условия I вещественными. Действительно, пусть $x_n(t) = x_n'(t) + ix_n''(t)$.

Из вещественности T^s и условия I следует для любой вещественной функции $f(t) \in L_p$

$$\lim_{n\to\infty} \int T_t^s f(t) x_n''(t) \, dm(t) = 0. \tag{1}$$

В силу вещественности T^s равенство (1) справедливо для любой комплексной функции $f(t)$, что и доказывает наше утверждение.

Следствие III. Покажем, что имеет место симметричность:

$$T_s^r f(s) = T_r^s f(r)$$

для любой $f(s) \in L_p$. Положим $T_t^r f(t) = K(t, r)$. В силу первой половины условия IV имеем $T_t^s K(t, r) = T_t^r K(t, s)$.

Отсюда в силу условия I

$$\lim_{n\to\infty} \int T_t^s K(t, r) x_n(t) \, dm(t) = K(s, r) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int T_t^r K(t, s) x_n(t) \, dm(t) = K(r, s).$$

Следствие IV. Покажем, что имеет место следующее условие:

$$\tilde{T}_s^r T_t^s f(t) = T_t^s \tilde{T}_t^r f(t). \tag{2}$$

В силу симметричности T_t^s и нормальности операторов T^s имеем:

$$\tilde{T}_s^r T_t^s f(t) = \tilde{T}_s^r T_s^t f(s) = T_s^t \tilde{T}_s^r f(s) = T_t^s \tilde{T}_t^r f(t).$$

Сравнивая первый и последний члены этого равенства, получаем (2).

В дальнейшем нам понадобится еще следующее тождество

$$\tilde{T}_u^r \tilde{T}_t^u T_t^s f(t) = \tilde{T}_t^u T_t^r T_t^s f(t). \tag{3}$$

Очевидно, нам достаточно доказать, что для любой функции $h(t) \in L_p$ имеем

$$\tilde{T}_u^r \tilde{T}_t^u h(t) = \tilde{T}_t^u T_t^r h(t). \tag{4}$$

Имеем в силу (2) (с заменой s на u)

$$\tilde{T}_u^{\,r} \int \tilde{T}_t^{u} h(t)\, g(t)\, dm(t) = \int h(t)\, \tilde{T}_u^{\,r} T_t^{u} g(t)\, dm(t) =$$
$$= \int h(t)\, T_t^{u} \tilde{T}_t^{r} g(t)\, dm(t) = \int \tilde{T}_t^{u} T_t^{r} h(t)\, g(t)\, dm(t).$$

Сравнивая первый и последний члены, получаем в силу произвольности $g(t)$ (4).

Если Z — абелева группа, то простейшей операцией обобщенного сдвига будет

$$T_t^s f(t) = f(t+s).$$

Здесь групповая операция записана аддитивно. В качестве меры $m(\Delta)$ следует выбрать инвариантную меру Хаара.

3. Обозначим через L пространство Банаха всех абсолютно интегрируемых функций $x(t)$ $(t \in Z)$ с обычными сложением и умножением на комплексные числа и с нормой $\| x \| = C_1 \int | x(t) |\, dm(t)$ (C_1 взято из условия V).

В L определим умножение (свертывание)

$$x * y(t) = \int \tilde{T}_t^s x(t)\, y(s)\, dm(s).$$

Покажем, что $x * y = y * x$. Пусть $x * y = h_1(t)$, $y * x = h_2(t)$ и $g(t)$ — произвольная функция из L. Имеем в силу теоремы Фубини и симметричности T_t^s:

$$\int h_1(t)\, g(t)\, dm(t) = \int\int \tilde{T}_t^s x(t)\, y(s)\, g(t)\, dm(s)\, dm(t) =$$
$$= \int y(s)\, dm(s) \int \tilde{T}_t^s x(t)\, g(t)\, dm(t) = \int y(s)\, dm(s) \int x(t)\, T_t^s g(t)\, dm(t) =$$
$$= \int y(s)\, dm(s) \int x(t)\, T_s^t g(s)\, dm(t) = \int x(t)\, dm(t) \int \tilde{T}_s^t y(s)\, g(s)\, dm(s) =$$
$$= \int g(s)\, dm(s) \int \tilde{T}_s^t y(s)\, x(t)\, dm(t) = \int h_2(t)\, g(t)\, dm(t).$$

В силу произвольности $g(t)$ $h_1(t) = h_2(t)$, что и требовалось доказать.

В силу теоремы Фубини имеем

$$\| x * y \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|.$$

Последовательность $x_n(t)$ из условия I очевидно играет роль единицы e в нашем кольце.

Образуем нормированное кольцо R из элементов $\zeta = \lambda e + x(t)$ (λ — комплексное число, $x(t) \in L$) с нормой $\| \zeta \| = | \lambda | + \| x \|$. Рассуждая дальше так же, как и в заметке ([1]), мы получим следующие результаты:

a) *Кольцо L образует в R максимальный идеал M_0, причем при гомоморфизме $R \to R / M_0$ элемент $\zeta = \lambda e + x(t)$ переходит в λ.*

Все остальные максимальные идеалы кольца R порождают непрерывные собственные функции операторов T^s, т. е. функции $\varphi(t)$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$T_t^s \varphi(t) = \varphi(s)\, \varphi(t).$$

b) *Каждая измеримая собственная функция $\varphi(s)$ операторов T^s, удовлетворяющая для любой функции $x(t) \in L$ соотношению*

$$\int \tilde{T}_t^s x(t)\, \varphi(t)\, dm(t) = \varphi(s) \int x(t)\, \varphi(t)\, dm(t), \qquad (5)$$

порождает максимальный идеал кольца R, отличный от M_0.

Действительно, достаточно положить

$$(\zeta, \varphi) = \lambda + \int x(t)\, \overline{\varphi(t)}\, dm(t).$$

c) *Каждая измеримая ограниченная собственная функция операторов T^s, удовлетворяющая соотношению (5), непрерывна.*

Доказательство. Пусть

$$\left(\tilde{T}_t^s x(t),\ \varphi(t)\right) = \int \tilde{T}_t^s x(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dm(t) = \overline{\varphi(s)} \int x(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dm(t) = \overline{\varphi(s)}\ (x,\ \varphi).$$

Отсюда

$$\overline{\varphi(s)} = \frac{(\tilde{T}_t^s x(t), \varphi)}{(x,\ \varphi)},$$

что в силу условия VI доказывает непрерывность $\varphi(s)$.

d) *Каждая непрерывная собственная функция порождается только одним максимальным идеалом.*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 4 в ([1]).

4. Через $\mathfrak{M}$ обозначим бикомпактное топологическое пространство всех максимальных идеалов кольца R. Поскольку между максимальными идеалами $\mathfrak{M} - M_0$ и собственными функциями операторов T^s установлено взаимно однозначное соответствие, совокупность всех собственных функций операторов T^s можно записать в виде функции от двух переменных $\varphi(\alpha,\ t)$, $\alpha \in \mathfrak{M} - M_0$, $t \in Z$.

Функции $(\zeta,\ M) = \lambda + \int x(t)\,\overline{\varphi(\alpha,\ t)}\,dm(t)$ непрерывны на $\mathfrak{M}$.

Для дальнейшего развития теории важно знать, когда для любого элемента $\zeta = \lambda e + x(t)$ существует комплексно сопряженный элемент $\tilde{\zeta}$, т. е. такой, что $(\tilde{\zeta},\ M) = \overline{(\zeta,\ M)}$. Оказывается, что

$$\tilde{\zeta} = \overline{\lambda} e + \lim_{n \to \infty} \int \tilde{T}_t^s \overline{x(t)}\, x_n(t)\,dm(t) = \overline{\lambda} e + \overline{x^*(t)}.$$

Вначале покажем, что $\tilde{T}_t^r \varphi(t) = \overline{\varphi(r)}\,\varphi(t)$.

Имеем

$$\int x(t)\,\tilde{T}_t^r \overline{\varphi(t)}\,dm(t) = \int T_t^r x(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dm(t) =$$

$$= \varphi(r) \int x(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dm(t) = \varphi(r)\ (x,\ \varphi).$$

Сравнивая первый и последний члены, получаем в силу произвольности $x(t)$ требуемое.

Далее, имеем

$$(\tilde{\zeta},\ M) = \overline{\lambda} + \lim_{n \to \infty} \int\int \tilde{T}_t^s \overline{x(t)}\, x_n(t)\,\overline{\varphi(\alpha,\ s)}\,dm(t)\,dm(s) =$$

$$= \overline{\lambda} + \int x(t)\,dm(t) \lim_{n \to \infty} \int \overline{\varphi(\alpha,\ s)}\, T_s^t x_n(s)\,dm(s) =$$

$$= \overline{\lambda} + \int \overline{x(t)}\,\varphi(\alpha,\ t)\,dm(t) \lim_{n \to \infty} \int x_n(s)\,\overline{\varphi(\alpha,\ s)}\,dm(s) =$$

$$= \overline{\lambda} + \int \overline{x(t)}\,\varphi(\alpha,\ t)\,dm(t) = \overline{(\zeta,\ M)},$$

ибо последовательность $x_n(s)$ играет роль единицы в кольце R и вычет по любому максимальному идеалу для нее равен 1.

Отсюда следует ([4]), что функции $(\zeta,\ M)$ всюду плотны в пространстве C всех непрерывных функций на $\mathfrak{M}$ при норме $\|\psi\| = \sup|\psi(M)|$.

5. Так же как и в заметке Райкова ([5]) (лемма), можно показать, что $\varphi(\alpha,\ t)$ непрерывна по совокупности переменных $\alpha,\ t$.

Артиллерийская ордена Ленина
Академия им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
27 V 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, ДАН, XXVIII, № 3 (1939). [2] И. М. Гельфанд, ДАН, XXV, № 7 (1939). [3] A. Haar, Math. Z., **31** (1929). [4] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [5] Д. А. Райков, ДАН, XXVIII, № 4 (1940). [6] Б. Левитан, Математ. сборн., 7 (49) (1940).