Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

РАЦИОНАЛЬНАЯ АНАМОРФОЗА УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1944)

В настоящей работе рассматривается вопрос об анаморфозируемости неприводимых алгебраических уравнений

$$F(t_1,\ t_2,\ t_3)=0, \tag{1}$$

т. е. вопрос о существовании такого полинома

$$\Phi(t_1,\ t_2,\ t_3)\equiv\psi_1(t_2,\ t_3)\,\psi_2(t_3,\ t_1)\,\psi_3(t_1,\ t_2)\,F(t_1,\ t_2,\ t_3), \tag{1'}$$

который допускал бы рациональную анаморфозу и, следовательно, мог бы быть тождественно представлен в виде некоторого детерминанта Массо

$$\Phi(t_1,\ t_2,\ t_3)\equiv|f_{i1}(t_i)\,f_{i2}(t_i)\,f_{i3}(t_i)|, \tag{1''}$$

где $f_{ik}(t_i)$ $(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ — полиномы от t_i.

Те условия, при которых данный полином $\Phi(t_1,\ t_2,\ t_3)$ допускает анаморфозу (является полиномом Массо), уже были исследованы автором ранее, также был рассмотрен вопрос о единственности анаморфоз ([1]) и выведен алгоритм анаморфозируемости ([2]). Для уравнения (1) исследован вопрос о единственности допускаемых анаморфоз ([3]); кроме того, автором найдены условия для того случая, когда это уравнение является нормальным и, по крайней мере бинарно, симметричным.

Пусть (1) есть уравнение Массо ([3]) с каноническим ([2]) по t_1 разложением

$$F(t_1,\ t_2,t_3)\equiv\sum_{i=1}^{r_1}\varphi_{1i}F_{1i}^{(23)} \tag{2}$$

и $t_1=t_{11}$ — общевзятое значение переменной t_1.

Если $\varphi_1(t_1,\ t_{11})$ есть общий наибольший делитель полиномов

$$\varphi_{1i}(t_1)\,\varphi_{1l}(t_{11})-\varphi_{1l}(t_1)\,\varphi_{1i}(t_{11})\qquad(i,\ l=1,\ldots,r_1;\ i\neq l), \tag{3}$$

то уравнение

$$\varphi_1(t_1,\ t_{11})=0 \tag{4}$$

определяет группу инволюции переменной t_1, определяемую ее значением $t_1=t_{11}$.

Приведенная теорема позволяет отыскать уравнение инволюции переменной t_1 и, следовательно, нормировать уравнение (1). Именно, если полином

$$\varphi_1(t_1,\ t_{11})=A_0(t_1)\,t_{11}^{\mu_1}+A_1(t_1)\,t_{11}^{\mu_1-1}+\ldots+A_{\mu_1}(t_1) \tag{5}$$

есть общий наибольший делитель полиномов (3), то за уравнение инволюции переменной t_1 может быть принято любое из уравнений

$$\tau_1=A_i(t_1)/A_{\mu_1}(t_1)\qquad(i=1,\ldots,\ \mu_1-1), \tag{6}$$

если только отношение $A_1(t_1)/A_{\mu_1}(t_1)$ не является постоянной величиной.

Если теперь (1) есть некоторое алгебраическое уравнение (возможно, и не являющееся уравнением Массо), то уравнение (4) назовем нормирующим по t_1 для уравнения (1), а уравнение (1) назовем нормированным по t_1 в том случае, когда нормирующее по t_1 уравнение линейно.

Нормированное (по всем переменным) уравнение, полученное исключением переменных t_1, t_2, t_3 из данного уравнения (1) и уравнений инволюций переменных t_1, t_2, t_3, назовем нормальной частью уравнения (1).

Нормированное уравнение, допускающее рациональные анаморфозы, является, очевидно, нормальным уравнением Массо. Таким образом вопрос приводится к анаморфозе нормированного уравнения.

Анаморфоза уравнений без помощи A-множителя полностью исследована ([2]). В том же случае, когда нормальное уравнение допускает анаморфозу с общим базисом для переменных t_2 и t_3, возможно всегда уравнение симметрировать, т. е. всегда можно подобрать постоянные a, b, c, d так, что подстановка

$$t_2 = -\frac{c\tau_2 + d}{a\tau_2 + b} \tag{7}$$

приводит нормальное уравнение Массо (1) степени m_i относительно t_i к новому уравнению Массо

$$F\left(t_1; -\frac{c\tau_2 + d}{a\tau_2 + b}; t_3\right)(a\tau_2 + b)^{m_2} = F_1(t_1, \tau_2, t_3) = 0, \tag{8}$$

симметричному относительно τ_2, t_3. Таким образом вопрос приводится к анаморфозе симметричных (и нормированных) уравнений.

Далее, можно доказать, что нормальное, симметричное относительно t_2 и t_3 уравнение не нулевого жанра относительно t_1, допускающее A-множитель, имеет анаморфозы с тождественными для переменных t_2 и t_3 шкалами. Если же это уравнение нулевого жанра относительно t_1, но оно не является уравнением третьего номографического порядка, то допускаемый им множитель будет вида

$$\psi_1(t_2, t_3) = t_2 - t_3 \tag{9}$$

или же вида

$$\psi_1(t_2, t_3) = at_2t_3 + b(t_2 + t_3) + d, \tag{10}$$

где a, b, d — некоторые постоянные.

При этом, оказывается, всегда возможно помощью дробно-линейной подстановки (7) любое симметричное, нормальное уравнение с A-множителем вида (10) привести также к симметричному уравнению с A-множителем вида (9).

Все изложенное дает возможность указать следующий порядок исследования рациональной анаморфозируемости уравнения (1):

1. Находим каноническое разложение полинома

$$F(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\sum_{k=1}^{r_3} \alpha_{kji}\varphi_{1i}\varphi_{2j}\varphi_{3k}. \tag{11}$$

Если все числа r_1, r_2, r_3 различны между собой и хотя бы одно из них больше трех, то уравнение (1) не анаморфозируемо.

2. Отыскиваем для каждой из переменных t_i уравнения инволюции по формулам вида (6) и нормируем уравнение (1), сведя таким

образом вопрос к нормированному уравнению; числа r_1, r_2, r_3 инвариантны относительно нормирования.

3. Если ни одно из чисел r_i не превосходит трех, то возможно, что полином $F(t_1, t_2, t_3)$ является полиномом Массо.

Оставляя в стороне элементарный случай уравнения третьего номографического порядка, можно всегда считать, что каноническая A-матрица $\overline{T}^{(k)}$ имеет три столбца. Допустим, для определенности, что взята матрица $\overline{T}^{(1)}$. При $r_2 = 2$ матрица $\overline{T}^{(1)}$ имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} \overline{T}^{(1)} & f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ \hline f_{21} & f_{11}' & f_{12}' & f_{13}' \\ f_{22} & f_{14}' & f_{15}' & f_{16}' \end{array} \tag{12}$$

и при $r_2 = 3$ вид

$$\begin{array}{c|ccc} \overline{T}^{(1)} & f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ \hline f_{21} & f_{11}' & f_{12}' & f_{13}' \\ f_{22} & f_{14}' & f_{15}' & f_{16}' \\ f_{23} & f_{17}' & f_{18}' & f_{19}' \end{array} \tag{13}$$

Здесь $f_{2i} \equiv f_{2i}(t_2)$ и $f_{3i} \equiv f_{3i}(t_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ — образующие канонических соответственно по t_2, t_3 разложений полинома $F(t_1, t_2, t_3)$.

Для полинома Массо $F(t_1, t_2, t_3)$ и только для него найдется такая неособенная матрица

$$C = \| C_{ij} \|, \tag{14}$$

что произведение матрицы $\overline{T}^{(1)}$ на C дает матрицу Массо $M^{(1)}$

$$\overline{T}^{(1)} C = M^{(1)}, \tag{15}$$

т. е. при $r_2 = 2$ матрицу вида

$$M^{(1)} = \left\| \begin{matrix} -\overline{f}_{13} & 0 & \overline{f}_{11} \\ \overline{f}_{12} & -\overline{f}_{11} & 0 \end{matrix} \right\|; \tag{16}$$

при $r_2 = 3$ матрицу вида

$$M^{(1)} = \left\| \begin{matrix} 0 & \overline{f}_{13} & -\overline{f}_{12} \\ -\overline{f}_{13} & \overline{0} & \overline{f}_{11} \\ \overline{f}_{12} & -\overline{f}_{11} & \overline{0} \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

В случае существования указанной матрицы C анаморфоза полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ будет

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \begin{vmatrix} \overline{f}_{11} & \overline{f}_{12} & \overline{f}_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31}' & f_{32}' & f_{33}' \end{vmatrix}, \tag{18}$$

где

$$f_{3i}' = \frac{1}{|C|} \sum_{j=1}^{3} C_{ji} f_{3j} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{19}$$

4. Если полином $F(t_1, t_2, t_3)$ нормированного уравнения (1) не является полиномом Массо, то возможно, что уравнение (1) допускает A-множитель. В этом случае возможно симметрировать уравнение

относительно, по меньшей мере, пары переменных помощью дробно-линейных подстановок вида

$$t_i = -\frac{c\tau_i + d}{a\tau_i + b}. \tag{20}$$

5. Допустим, что нормированное уравнение (1) симметрично относительно лишь пары переменных t_2 и t_3. Если теперь $r_1 > 3$, то это уравнение не анаморфозируемо. Пусть $r_1 = 3$. Тогда уравнение

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=0}^{m} t_3^k F_k^{(12)} = 0 \tag{2'}$$

будет допускать анаморфозу в том и только в том случае, если все члены последовательности

$$-F_{k-1}^{(12)} + t_2 F_k^{(12)} \quad (k = 0, \ldots, m+1) \tag{21}$$

являются линейной комбинацией трех из них ([4]).

В этом случае полином

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = (t_2 - t_3) F(t_1, t_2, t_3) \tag{22}$$

будет полиномом Массо.

6. Допустим, что нормированное уравнение (1), симметричное относительно t_2, t_3 и нулевого жанра относительно t_1, не допускает ни непосредственной анаморфозы, ни A-множителя вида (11). Тогда оно анаморфозируемо в том и только в том случае, если найдутся такие постоянные a, b, d, что подстановка

$$t_2 = -\frac{b\tau_2 + d}{a\tau_2 + b} \tag{23}$$

приведет его к новому уравнению, допускающему A-множитель

$$\psi_1(\tau_2, t_3) = \tau_2 - t_3. \tag{24}$$

7. Допустим, наконец, что нормированное уравнение (2′) симметрично относительно всех трех переменных. Если оно не является уравнением нулевого жанра, то оно анаморфозируемо в том и только в том случае, если в последовательности

$$-F_{j-1}^{(12)} + (t_1 + t_2) F_j^{(12)} - t_1 t_2 F_{j+1}^{(12)} \quad (j = 0, \ldots, m+1) \tag{25}$$

найдутся три члена таких, что каждый из членов последовательности (25) является линейной комбинацией этих трех членов.

В этом случае полином

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1) F(t_1, t_2, t_3) \tag{26}$$

является полиномом Массо.

Поступило
9 V 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, XXVIII, № 7 (1940). [2] П. В. Николаев, ДАН, XXVIII, № 9 (1940). [3] П. В. Николаев, Уч. зап. МГУ, XXIII, кн. 5 (1941). [4] П. В. Николаев, ДАН, XLVII, № 2 (1945).