Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 9

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ СУММИРОВАНИЯ, СВЯЗАННОЙ С ТРАНСФОРМАЦИЕЙ ГАНКЕЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 III 1944)

1. Пусть

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{2\pi i x y} dy. \tag{1}$$

Тогда, как известно, при некоторых условиях, наложенных на функцию $f(x)$ (п. 2), $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)$ является инвариантом относительно трансформации (1), т. е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n). \tag{2}$$

Цель заметки — дать подобного рода формулу (4) для трансформации Ганкеля

$$\Phi(x)=2\pi\int_{0}^{\infty}\varphi(y)\, y J_p(2\pi x y)\, dy \tag{3}$$

при целых и полуцелых $p>1$ и указать некоторые следствия из нее.

2. Теорема. *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

a) $t^{-p}\varphi(t)$ *ограничена, интегрируема в* $(0, \infty)$ *и непрерывна при значениях* t, *представимых положительно определенной формой* $A(x, x)\equiv\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j$, $k=2p+2$, $p>-1$ *с заданными целочисленными коэффициентами* a_{ij}, x_i — *целые:*

b) *при* $t\to\infty$ $\varphi(t)=O\left(t^{-\frac{1}{2}k-1-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon>0$;

c) *при* $n\to\infty$ $\Phi(n)\equiv 2\pi\int_{0}^{\infty}\varphi(t)\, t J_p(2\pi n t)\, dt=O\left(n^{-\frac{1}{2}k-1-\eta}\right)$, $\eta>0$.

Обозначим через $B(x, x)$ *форму* $\sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}x_i x_j$, *где* $A_{ij}/D(A)$ — *элемент матрицы* A^{-1}, *обратной матрице* $A=\| a_{ij}\|$, $D(A)$ — *определитель матрицы* A, *и через* $r_A(n)$ — *число целочисленных решений уравнения* $\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j=n$.

*Тогда имеет место равенство**

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_A(n)\frac{\varphi(\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^p}=\frac{1}{\sqrt{D(A)}}\sum_{n=0}^{\infty} r_B(n)\frac{\Phi(\sqrt{n/D(A)})}{(\sqrt{n/D(A)})^p}, \tag{4}$$

представляющее краткую запись следующего равенства

$$\lim_{n\to+0}\frac{\varphi(\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^p}+\sum_{n=1}^{\infty} r_A(n)\frac{\varphi(\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^p}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D(A)}}\left[\frac{2\pi^{p+1}}{\Gamma(p+1)}\int_0^{\infty}\varphi(t)\,t^{p+1}dt+\sum_{n=1}^{\infty} r_B(n)\frac{\Phi(\sqrt{n/D(A)})}{(\sqrt{n/D(A)})^p}\right], \tag{4'}$$

оба ряда — абсолютно сходящиеся.

Доказательство. Исходим из обобщенной формулы суммирования Пуассона

$$\sum_n f(n_1,\ldots,n_k)=\sum_n F(n_1,\ldots,n_k), \tag{5}$$

где

$$F(n_1,\ldots,n_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_k)\,e^{2\pi i(n,x)}dx_1\ldots dx_k\ ^{**},\ k\geqslant 1. \tag{6}$$

Для ее справедливости достаточно выполнения следующих условий (Bochner [2]):

α) $f(x_1,\ldots,x_k)$ ограничена, интегрируема в $-\infty<x_i<\infty$ $(i=1,2,\ldots,k)$ и непрерывна при целочисленных значениях $x_1,\ldots,x_k$;

β) ряд $\sum\limits_n f(x_1+n_1,\ldots,x_k+n_k)$ равномерно сходится в $-{}^1/_2\leqslant x_i\leqslant{}^1/_2$ $(i=1,2,\ldots,k)$;

γ) ряд $\sum\limits_n F(n_1,\ldots,n_k)$ сходится.

При условиях α) и β) ряд Фурье для функции

$$\psi(x_1,\ldots,x_k)\equiv\sum_n f(x_1+n_1,\ldots,x_k+n_k)$$

$$\psi(x_1\ldots,x_k)=\sum_m e^{-2\pi i(m,x)}\int_{-1/2}^{1/2}\cdots\int\psi(y_1,\ldots,y_k)\,e^{2\pi i(m,y)}dy_1\ldots dy_k=$$

$$=\sum_m e^{-2\pi i(m,x)}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(y_1\ldots,y_k)\,e^{2\pi i(m,y)}dy_1\ldots dy_k$$

суммируем к ней способом C 1 (в точках непрерывности ψ).

Отсюда при $x_1=\ldots=x_k=0$ в силу γ) и следует (5). Это доказательство формулы (5) обнаруживает, что условие γ) может быть

* Частный случай (4) — при $p=0$, $a_{ij}=\delta_{ij}$ и функции φ, равной нулю вне конечного интервала $0\leqslant\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ — см. Landau [1]. Формула суммирования Пуассона для cos-трансформации Фурье содержится в (4) при $k=1$ и $a_{11}=1$.

** $(n,x)\equiv n_1x_1+\ldots+n_kx_k$; знак $\sum\limits_n$ обозначает суммирование по всем целым $n_1,\ldots,n_k$ от $-\infty$ до $+\infty$.

опущено, если ряд $\sum\limits_{n} F(n_1, \ldots, n_k)$ в (5) суммировать способом С 1*.

С целью доказать (4), положим в (5)

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_1(r), \tag{7}$$

где $r = \sqrt{\sum\limits_{i, j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j}$. Легко видеть, что интеграл в правой части (6) в этом случае может быть сведен к однократному. В самом деле, вводя вместо x переменные y линейным преобразованием $x = Ly$, приводящим $A(x, x)$ к сумме квадратов, имеем

$$F(n_1, \ldots, n_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \varphi_1(\sqrt{(y, y)})\, e^{2\pi i (n, Ly)} D(L)\, dy_1 \ldots dy_k.$$

Но $(n, Ly) = (N, y)$, где $N = L'n$, и $(N, N) = (A^{-1} n, n)$, так как $L'AL = E$.

Вводя теперь вместо $y_1, \ldots, y_k$ полярные координаты $r, \theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_k)\, e^{2\pi i (n, x)}\, dx_1, \ldots, dx_k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(A)}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi_1(r)\, r^{k-1} \left[\int\limits_{\Omega_k} \ldots \int e^{2\pi i (N, y)}\, d\omega_k \right] dr.$$

Внутренний интеграл берется по Ω_k — поверхности k-мерной единичной сферы и может быть непосредственно вычислен, ибо, в силу его инвариантности относительно ортогонального преобразования, он сводится к

$$\frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int\limits_{0}^{\pi} e^{2\pi i |N| r \cos \theta_{k-1}} \sin^{k-2} \theta_{k-1}\, d\theta_{k-1}, \quad |N| = \sqrt{(A^{-1} n, n)},$$

а следовательно, мы получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_k)\, e^{2\pi i (n, x)}\, dx_1 \ldots dx_k =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{D(A)}} |N|^{-\frac{1}{2}(k-2)} \int\limits_{0}^{\infty} r^{k/2} J_{\frac{k-2}{2}}(2\pi |N| r)\, \varphi_1(r)\, dr. \tag{8}$$

Таким образом мы обнаруживаем, что при условии (7) $F(n_1, \ldots, n_k)$ есть функция от $|N|$, $\frac{1}{\sqrt{D(A)}} \Phi_1(|N|)$ и что $\Phi(|N|)$ есть трансформация (3) Ганкеля функции $\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = t^p \varphi_1(t), \qquad \Phi(t) = t^p \Phi_1(t). \tag{9}$$

---

* При существовании $f(n_1 - 0, \ldots, n_k - 0)$ и $f(n_1 + 0, \ldots, n_k + 0)$ в условии a) вместо непрерывности можно ограничиться кусочной непрерывностью, если $f(n_1, \ldots, n_k)$ в левой части (5) заменить полусуммой $^1/_2 [f(n_1 - 0, \ldots, n_k - 0) + f(n_1 + 0, \ldots, n_k + 0)]$.

Учитывая, что ряд $\sum\limits_n (An, n)^{-\mu}$ сходится при $2\mu > k$, ибо $(An, n) \geqslant \lambda_1 (n, n)$, где $\lambda_1 > 0$ — наименьшее собственное значение матрицы A, мы легко обнаруживаем, что условия α), β) и γ), в силу предположений a) и b) о функции φ, соблюдены, и, таким образом, равенство (5) дает

$$\sum_n \varphi_1 \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} n_i n_j} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(A)}} \sum_n \Phi_1 \left(\sqrt{\frac{1}{D(A)} \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij} n_i n_j} \right) \text{*}. \tag{10}$$

В силу (9) и b) ряд в левой части сходится абсолютно и, следовательно, может быть записан в форме $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_A(n) \frac{\varphi(\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^p}$ ($\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)}{n^p}$ существует по условию a)), тогда как, в силу c), ряд в правой части также абсолютно сходится и равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_B(n) \left(\sqrt{\frac{D(A)}{n}} \right)^p \Phi \left(\sqrt{\frac{n}{D(A)}} \right),$$

ч. и т. д.

Следствие. При $a_{ij} = \delta_{ij}$ выражение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_k(n) \frac{\varphi(\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^p}$, где $r_k(n)$ — число целочисленных решений уравнений $x_1^2 + \ldots + x_k^2 = n$ **, является инвариантом относительно трансформации (3) Ганкеля.

Замечание. Условия теоремы могут быть ослаблены, если ряды в (4) суммировать по способу Чезаро (или, что при соответствующем доказательстве технически удобнее, по эквивалентному ему способу Рисса) достаточно высокого порядка.

3. Формула (4) при спецификации в ней функции $\varphi(x)$ является источником любопытных тождеств. Так, например, полагая в ней $\varphi(x) = e^{-ax^2} J_p(bx)$, $a > 0$, мы находим обобщение классического θ-соотношения (получающегося при $p = -1/2$ и $a_{11} = 1$).

Положим $\varphi(x) = \begin{matrix} x^p, & 0 \leqslant x < \sqrt{\omega} \\ 0, & x > \sqrt{\omega} \end{matrix}$ и пусть ω не допускает целочис-

---

* Ряд в правой части (5), а следовательно, и (10), при соблюдении условий α) и β) суммируем способом C 1 к обобщенной сумме, равной левой части (5) и соответственно (10). При этом необходимо иметь в виду, что, хотя при $k > 1$ из сходимости k-кратного ряда не вытекает его суммируемость по способу C 1 (например, если $u_{mn} = 0$, $n > 2$, $u_{m1} = 1$, $u_{m2} = -1$, то $s_{mn} = 0$, $n > 1$, $s_{m1} = m$, т. е. $\lim\limits_{m, n \to \infty} s_{mn} = 0$, тогда как $\sigma_{mn} = \frac{1}{mn} \sum\limits_{1}^{m,n} s_{ij} = \frac{m+1}{2n}$ не имеет предела при m и n стремящихся к ∞), однако, если существуют оба предела $\lim s_{mn}$ и $\lim \sigma_{mn}$, то они равны между собою (ср., например, Lösch [3]).

** Иначе: $r_k(n)$ есть коэффициент при x^n в разложении $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} \right)^k = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_k(n) x^n$; это выражение для $r_k(n)$ имеет смысл при любом k.

ленных решений уравнения $\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_ix_j = \omega$. Тогда, в силу (10) (условия α) и β), очевидно, соблюдены), находим

$$\sum_{0 \leqslant n < \omega} r_A(n) = \frac{(\sqrt{\pi\omega})^k}{\sqrt{D(A)}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{\omega})^{k/2}}{\sqrt{D(A)}} \sum_n{}' \frac{J_{k/2}\left(2\pi\sqrt{\frac{\omega}{D(A)}\sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}n_in_j}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{D(A)}\sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}n_in_j}\right)^{k/2}} . \qquad (11)$$

формулу для $\sum_{0 \leqslant n < \omega} r_A(n)$ — числа точек с целочисленными координатами внутри гиперэллипсоида $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \leqslant \omega$ (штрих над суммой означает, что суммирование производится по всем целым значениям $n_1, \ldots, n_k$ кроме $n_1 = \ldots = n_k = 0$; выделяемое при этом слагаемое является объемом упомянутого гиперэллипсоида). Ряд в правой части, в силу пункта 2, суммируем способом C1 *.

В силу подстрочного примечания на стр. 389, формула (11) остается справедливой и при любом ω, если левую ее часть записать в форме $\sum_{0 \leqslant n \leqslant \omega} r_A(n) - {}^1/_2\, r_A(\omega)$.

Поступило
20 I 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Landau, Zahlentheorie, **2**, 274, 1927. [2] S. Bochner, Math. Ann., **106** (1932). [3] F. Lösch, Math. Z., **34** (1931). [4] A. Oppenheim, Proc. Lond. Math. Soc., **26** (1926).

* Результат о C1-суммируемости ряда в правой части формулы (11) существенен главным образом при $k > 2$, ибо, как показывает подробный анализ, имеет место формула

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant \omega} r_A(n) - \frac{1}{2} r_A(\omega) = \frac{(\sqrt{\pi\omega})^k}{\sqrt{D(A)}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{\omega})^{k/2}}{\sqrt{D(A)}} \sum_{n=1}^{\infty} r_B(n) \left(\sqrt{\frac{D(A)}{n}}\right)^{k/2} J_{k/2}\left(2\pi\sqrt{\frac{n\omega}{D(A)}}\right), \quad \omega > 0,\ k > 0,$$

если ряд в правой части при $k \geqslant 3$ суммировать способом $\left(R, n, \frac{k-3}{2} + \varepsilon\right)$, $\varepsilon > 0$; при k же равном 2 он сходится (см., например, ([4]) для $a_{ij} = \delta_{ij}$).