Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 9

МАТЕМАТИКА

В. ВАГНЕР

ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1944)

Понятие геометрического объекта является одним из наиболее важных понятий в современной дифференциальной геометрии. Тем не менее имеется сравнительно мало работ, посвященных общей теории геометрических объектов. Первое точное определение геометрического объекта было дано в 1935 г. Схоутеном и Ван-Данцигом ([1]). Первая попытка построить общую теорию геометрических объектов была сделана Вундхайлером ([2]). Дальше общая теория геометрических объектов была развита Схоутеном и Хантьесом ([3]). Но ни один из этих авторов не обратил внимания, что в неявной форме геометрические объекты общего вида рассматривались уже в прошлом веке в связи с теорией бесконечных непрерывных групп преобразований ([4]). Метод Медолаги для получения всех непрерывных (конечных и бесконечных) групп преобразований дает метод получения всех типов геометрических объектов класса v (([3]), стр. 371), которые являются единственными геометрическими объектами, действительно встречающимися в дифференциальной геометрии.

Задачей настоящей заметки является установление связи, с современной точки зрения, между общей теорией геометрических объектов и теорией непрерывных групп преобразований.

Рассмотрим n-мерное геометрическое пространство X_n с координатами точки ξ^α, допустимые преобразования координат в котором определяют группу

$$'\xi^\alpha = f^\alpha(\xi^\lambda) \tag{1}$$

всех возможных аналитических точечных преобразований в n-мерном арифметическом пространстве переменных ξ^α.

Пусть Ω^i $(i=1, \ldots, N)$ будет геометрический объект класса v в X_n, преобразование компонент которого дается уравнениями:

$$'\Omega^i = F^i(\Omega^j, \xi^\alpha, f^\alpha(\xi^\lambda), f^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}(\xi^\lambda)) \quad (s=1, \ldots, v, \ \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_s). \tag{2}$$

Геометрические объекты с одним и тем же законом преобразования компонент называются геометрическими объектами одного и того же типа. Рассматривая Ω^i как независимые переменные, мы получаем, что уравнения (1) и (2) вместе определяют бесконечную группу точечных преобразований в арифметическом пространстве $n+N$ переменных ξ^α, Ω^i. Эта группа является продолжением группы (1).

Обратно, каждое продолжение группы (1), вводящее N новых переменных, определяет некоторый тип геометрических объектов с N компонентами. Группа преобразований (1) и (2) называется тотальной группой типа геометрических объектов Ω_i. Два типа геометрических объектов называются подобными, если их тотальные группы подобны. Тотальная группа всегда будет импримитивной; уравнения $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ определяют ее поверхности импримитивности. Рассмотрим подгруппу тотальной группы, которая сохраняет инвариантной некоторую поверхность импримитивности $\xi^\alpha = \xi^\alpha_0$. Эта подгруппа индуцирует на данной поверхности импримитивности конечную группу

$$'\Omega^i = F^i(\Omega^j,\ \xi^\alpha_0,\ \xi^\alpha_0,\ f^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_S}(\xi^\lambda_0)), \tag{3}$$

называемую локальной группой в точке ξ^α_0 рассматриваемого типа геометрических объектов.

Геометрический объект называется дифференциальным геометрическим объектом, если функция F^i в уравнениях (2) не содержит явно ξ^α и $f^\alpha(\xi^\lambda)$, т. е. уравнения (2) имеют вид

$$'\Omega^i = F^i(\Omega^j,\ f^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_S}(\xi^\lambda)). \tag{4}$$

Все геометрические объекты, рассматриваемые в дифференциальной геометрии, являются дифференциальными геометрическими объектами, за исключением точки ξ^α, которая представляет собой геометрический объект класса 0, принадлежащий к типу геометрических объектов, определенному уравнениями

$$'\Omega^\alpha = \Omega^\alpha + f^\alpha(\xi^\lambda) - \xi^\alpha. \tag{5}$$

Может быть доказано, что каждый тип геометрических объектов подобен некоторому типу дифференциально геометрических объектов. Дальше мы ограничимся изучением дифференциальных геометрических объектов.

Рассмотрим общий случай, когда локальная группа рассматриваемого типа дифференциальных геометрических объектов может быть интранзитивной, и пусть L есть число измерений ее поверхности интранзитивности.

Тогда рассматриваемый тип геометрических объектов будет подобен типу следующего вида:

$$\left.\begin{array}{l} '\Omega^a = F^a(\Omega^b,\ \Omega^h,\ f^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_S}(\xi^\lambda)), \\ '\Omega^h = \Omega^h, \quad '\Omega^p = \Omega^p, \end{array}\right\} \begin{array}{l} a,\ b = 1, \ldots, L, \\ h = L+1, \ldots, M, \\ p = M+1, \ldots, N, \end{array} \tag{6}$$

где Ω^h входят существенным образом в первую систему уравнений (6), т. е. число параметров Ω^h не может быть уменьшено с помощью преобразования переменных. Рассмотрим тип дифференциально геометрических объектов с $N_{nv} = n\left[\frac{(n+1)\ldots(n+v)}{1\ldots v} - 1\right]$ компонентами, компоненты которых преобразуются таким же образом, как и частные производные до v порядка включительно от n скалярных функций. Мы обозначим компоненты такого геометрического объекта через $a^\alpha_{\beta_1}, \ldots, a^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_v}$. Локальная группа этого типа геометрических объектов будет просто транзитивная группа, которую мы будем обозначать через $\mathfrak{A}_{N_{nv}}$. Наряду с этим мы рассмотрим тип дифференциальных геометрических объектов также с N_{nv} компонентами, компоненты которых преобразуются таким же образом, как частные производные до v порядка включительно от координат точки ξ^α, рассматриваемых как функции от n инвариантных параметров. Мы обозначим компоненты этих геометрических объектов через $b^\alpha_{\beta_1} \ldots b^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_\alpha}$. Локальная группа этого типа геометрических объектов будет просто транзитивная группа, которую будем обозначать через $\mathfrak{B}_{Nnv}$. Легко может быть показано, что группы $\mathfrak{B}_{Nnv}$ и $\mathfrak{B}_{Nnv}$ взаимны.

Уравнения

$$F^a\left(\overset{0}{\Omega}{}^b,\ \overset{0}{\Omega}{}^h,\ b^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}\right)=\Omega^a, \tag{7}$$

где $\overset{0}{\Omega}{}^b$, $\overset{0}{\Omega}{}^h$ фиксированы, а Ω^a рассматриваются как переменные параметры, определяют систему поверхностей импримитивности для группы $\mathfrak{B}_{Nnv}$. Заменяя $b^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}$ через $a^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}$, мы получим уравнения, определяющие полную систему инвариантов для некоторой подгруппы группы $\mathfrak{A}_{Nnv}$. Отсюда легко может быть выведено, что задача нахождения всех типов геометрических объектов в X_n эквивалентна нахождению всех систем импримитивности для просто транзитивной группы $\mathfrak{B}_{Nnv}$ или (что то же самое) эквивалентна нахождению инвариантов всех подгрупп просто транзитивной группы $\mathfrak{A}_{Nnv}$.

Рассмотрим некоторое точечное преобразование $^*\xi^\alpha=\varphi^\alpha(\xi^\lambda)$ в X_n. При этом преобразовании каждый геометрический объект $\Omega^i=\Omega^i(\xi^\alpha)$ преобразуется в геометрический объект $^*\Omega^i={}^*\Omega^i(\xi^\alpha)$, определяемый уравнениями

$$^*\Omega^i(\varphi^\alpha(\xi^\lambda))=F^i(\Omega^j(\xi^\lambda),\ \varphi^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}(\xi^\lambda)). \tag{8}$$

Если $^*\Omega^i$ совпадает с Ω^i, т. е.

$$\Omega^i(\varphi^\alpha(\xi^\lambda))=F^i(\Omega^j(\xi^\lambda),\ \varphi^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}(\xi^\lambda)), \tag{9}$$

то геометрический объект Ω^i называется инвариантным при соответствующем точечном преобразовании в X_n. Совокупность преобразований, оставляющих инвариантным геометрический объект Ω^i, определяет непрерывную группу преобразований Ли, которая может быть конечной или бесконечной (в частном случае она может сводиться к тождественному преобразованию). Эта группа называется группой инвариантности геометрического объекта Ω^i. Уравнения (9) являются ее определяющими уравнениями.

Будучи разрешены относительно $\Omega^i(\xi^\lambda)$, они могут быть представлены так:

$$\Phi^i(\Omega^j(\varphi^\alpha(\xi^\lambda)),\ \varphi^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}(\xi^\lambda))=\Omega^i(\xi^\lambda). \tag{10}$$

Медолаги показал ((4), стр. 199), что определяющие уравнения любой группы могут быть представлены в виде (10). С современной точки зрения, эта теорема Медолаги означает, что каждая непрерывная группа Ли (конечная или бесконечная) является группой инвариантности некоторого дифференциального геометрического объекта.

Рассмотрим однопараметрическое семейство точечных преобразований в X_n

$$^*\xi^\alpha=\varphi^\alpha(\xi^\lambda,\ t), \tag{11}$$

содержащее тождественное преобразование при $t=0$. Преобразования (11) определяют бесконечно малое преобразование, соответствующее вектору $V^\alpha(\xi^\lambda)=(\partial\varphi^\alpha/\partial t)_{t=0}$. Преобразуя геометрический объект Ω^i с помощью точечных преобразований (11), мы получим однопараметрическое семейство геометрических объектов $^*\Omega^i(\xi^\lambda,\ t)$.

Объект $\overset{L}{D}\Omega^i$, где

$$\overset{L}{D}\Omega^i=-\left(\frac{\partial^*\Omega^i}{\partial t}\right)_{t=0}=V^\omega\partial_\omega\Omega^i-\sum_{s=1}^{v}\underset{0}{F}{}^i_{\varphi^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}}\partial_{\beta_1}\ldots\partial_{\beta_s}V^\alpha,$$

$$\underset{0}{F}{}^i_{\varphi^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}}=F^i_{\varphi^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}}(\Omega^j,\ \delta^\alpha_\beta,\ 0\ldots 0) \tag{12}$$

называется производной Ли ([5]) от геометрического объекта Ω^i относительно бесконечно малого преобразования V^α. Из этого определения следует, что если преобразования (11) принадлежат к группе инвариантности геометрического объекта Ω^i, то его производная Ли будет равна нулю. Таким образом, определяющие уравнения для бесконечно малых преобразований группы инвариантности Ω^i могут быть записаны так:

$$\overset{L}{D}\Omega^i = 0. \tag{13}$$

Еще раньше Медолаги Энгель ([6]) нашел общий канонический вид для всех определяющих уравнений бесконечно малых преобразований непрерывных групп. С современной точки зрения, определяющие уравнения для бесконечно малых преобразований, представленные в форме Энгеля, выражают обращение в нуль производной Ли от соответствующего дифференциально геометрического объекта относительно всех бесконечно малых преобразований, содержащихся в этой группе.

Саратовский государственный
университет

Поступило
21 XI 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Schouten u. D. van Dantzig, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 2—3, 15 (1935). [2] A. Wundheiler, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 4, 366 (1937). [3] J. A. Schouten and J. Haantjes, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 42, 356 (1937). [4] S. Lie, Ber. Sachs. Ges. d. Wiss.. 3, 316 (1891); F. Engel, Math. Ann., 27 (1886); P. Medolaghi, Ann. di Matematica, ser. 2, 25, 179 (1897); E. Vessiot, Ann. de l'Ec. Norm. Sup., 20, 411 (1903). [5] И. А. Схоутен и Д. Дт. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, I, 1939, стр. 135. [6] F. Engel, Ber. Sachs. Ges. d. Wiss., 9 (1894).