Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И ПОКРЫВАЮЩЕМ ЕГО СЛОЕ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 11 X 1946)

1. Будем рассматривать полупространство $y>0$, заполненное упругой средой, свойства которой характеризуются плотностью ρ_2 и скоростями распространения продольных волн a_2 и поперечных волн b_2.

Пусть это полупространство покрыто слоем упругой жидкости (точнее, упругой среды, обладающей только объемной упругостью); плотность жидкости ρ_1, скорость продольных волн в ней a_1. В данной статье ограничимся случаем, когда $a_2>b_2>a_1$. Толщина покрывающего слоя H. Будем рассматривать в такой упругой системе малые колебания, параллельные плоскости Oxy. Ось Ox совпадает с границей раздела. Тогда движение может быть описано с помощью потенциала скоростей $\varphi_1(x, y, t)$ для жидкости и потенциалов смещений для твердой упругой среды: продольного $\varphi_2(x, y, t)$ и поперечного $\psi_2(x, y, t)$. Названные потенциалы удовлетворяют дифференциальным уравнениям (влиянием силы тяжести пренебрегаем):

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=0 \qquad (-H<y<0); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}-\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\frac{1}{b_2^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0 \qquad (y>0). \tag{2}$$

Будем называть плоскими волнами решения этих уравнений вида $\varphi_1(t+\theta x, y)$, $\varphi_2(t+\theta x, y)$, $\psi_2(t+\theta x, y)$, зависящие от двух аргументов $\tau=t+\theta x$ и y, где θ — положительное постоянное. Дифференциальные уравнения плоских волн получаются из (1) и (2)

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\left(\frac{1}{a_1^2}-\theta^2\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}=0; \tag{1'}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}-\left(\frac{1}{a_2^2}-\theta^2\right)\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial\tau^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\left(\frac{1}{b_2^2}-\theta^2\right)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau^2}=0. \tag{2'}$$

В качестве граничных поставим следующие условия. На свободной поверхности жидкости давление должно сохранять постоянное значение.

На границе контакта должна иметь место непрерывность вертикальных скоростей и непрерывность нормальных напряжений. Касательные напряжения на границе раздела обращаются в нуль, так как жидкость предполагается невязкой. Эти условия, сформулированные для плоских волн, выражаются так:

1) $\varphi_1(\tau, -H) = 0,$ 2) $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial y\,\partial\tau} - \theta\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2},$

3) $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = (1 - 2b_2^2\theta^2)\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2} - 2b_2^2\theta\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau\,\partial y},$

4) $2b_2^2\theta\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau\,\partial y} + (1 - 2b_2^2\theta^2)\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau^2} = 0.$

Характер движения существенно зависит от значения θ, точнее, от знаков разностей $((1/a_1^2) - \theta^2), ((1/a_2^2) - \theta^2)$ и $((1/b_2^2) - \theta^2)$. Оставим в стороне случай $\theta^2 > 1/b_2^2$, соответствующий поверхностным волнам.

2. Пусть $\theta < 1/a_2$. Решения системы (1') и (2') имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau, y) &= f_1(\tau + \varkappa_1 y) + \tilde{f}_1(\tau - \varkappa_1 y),\\ \varphi_2(\tau, y) &= f_2(\tau + \varkappa_2 y) - \tilde{f}_2(\tau - \varkappa_2 y),\\ \psi_2(\tau, y) &= g_2(\tau + \lambda_2 y) + \tilde{g}_2(\tau - \lambda_2 y),\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varkappa_1 = (1/a_1^2 - \theta^2)^{1/2}$, $\varkappa_2 = (1/a_2^2 - \theta^2)^{1/2}$, $\lambda_2 = (1/b_2^2 - \theta^2)^{1/2}$, а функции $f_1, \tilde{f}_1, f_2, \tilde{f}_2, g_2, \tilde{g}_2$ пока произвольны. Граничные условия налагают на них такие зависимости:

$$f_1(\tau + h) + \tilde{f}_1(\tau) = 0, \quad h = -2\varkappa_1 H,$$

$$\varkappa_1[f_1'(\tau) - \tilde{f}_1'(\tau)] = \varkappa_2[f_2''(\tau) - \tilde{f}_2''(\tau)] - \theta[g_2''(\tau) + \tilde{g}_2''(\tau)],$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}[f_1'(\tau) + \tilde{f}_1'(\tau)] = (1 - 2b_2^2\theta^2)[f_2''(\tau) + \tilde{f}_2''(\tau)] - 2b_2^2\theta\lambda_2[g_2''(\tau) - \tilde{g}_2''(\tau)];$$

$$2b_2^2\theta\lambda_2[f_2''(\tau) - \tilde{f}_2''(\tau)] + (1 - 2b_2^2\theta^2)[g_2''(\tau) + \tilde{g}_2''(\tau)] = 0.$$

Исключая из этих соотношений функции $f_1, \tilde{f}_1, \tilde{g}_2$, придем к функциональному уравнению, которому должны удовлетворять $\tilde{f}_2, f_2, g_2$, если они входят в систему решений задачи:

$$\begin{aligned} m\tilde{f}_2(\tau + h) + \tilde{f}_2(\tau) = &-\frac{R - r}{R^* + r}f_2(\tau) - \frac{R + r}{R^* + r}f_2(\tau + h) + \\ &+ \frac{4b_2^2\theta\lambda_2(1 - 2b_2^2\theta^2)}{R^* + r}[g_2(\tau + h) + g_2(\tau)] + C_1\tau + C_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь использованы сокращенные обозначения:

$$R = (1 - 2b_2^2\theta^2)^2 - 4b_2^4\theta^2\varkappa_2\lambda_2, \quad R^* = (1 - 2b_2^2\theta^2)^2 + 4b_2^4\theta^2\varkappa_2\lambda_2,$$
$$m = (R^* - r)/(R^* + r), \quad r = \rho_1\varkappa_2/\rho_2\varkappa_1.$$

При условии ограниченности на бесконечности функций $f_2, g_2, \tilde{f}_2$ решение уравнения (4) относительно $\tilde{f}_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2(\tau) = &-\frac{R - r}{R^* + r}f_2(\tau) - \frac{2r(R^* + R)}{(R^* + r)^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-m)^{k-1}f_2(\tau + kh) + \\ &+ \frac{4b_2^2\theta\lambda_2(1 - 2b_2^2\theta^2)}{R^* + r}\left[g_2(\tau) + \frac{2r}{R^* + r}\sum_{k=1}^{\infty}(-m)^{k-1}g_2(\tau + kh)\right].\end{aligned} \tag{5}$$

Окончательное решение поставленной задачи выражается в виде:

$$\varphi_1(\tau, y) = \frac{2\rho_2 r(1-2b_2^2\theta^2)}{\rho_1(R^*+r)} \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k [f_2'(\tau+\varkappa_1 y+kh) -$$

$$- f_2'(\tau-\varkappa_1 y+kh+h)] + \frac{4\rho_2 r b_2^2 \theta\lambda_2}{\rho_1(R^*+r)} \sum_{k=0}^{\infty} (-m)^k [g_2'(\tau+\varkappa_1 y+kh) -$$

$$- g_2'(\tau-\varkappa_1 y+kh+h)],$$

$$\varphi_2(\tau, y) = f_2(\tau+\varkappa_2 y) - \frac{R-r}{R^*+r} f_2(\tau-\varkappa_2 y) - \tag{6}$$

$$- \frac{2r(R^*+R)}{(R^*+r)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^{k-1} f_2(\tau-\varkappa_2 y+kh) -$$

$$- \frac{4b_2^2\theta\lambda_2(1-2b_2^2\theta^2)}{R^*+r} \left[g_2(\tau-\varkappa_2 y) + \frac{2r}{R^*+r} \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^{k-1} g_2(\tau-\varkappa_2 y+kh) \right];$$

$$\psi_2(\tau, y) = -g_2(\tau+\lambda_2 y) - \frac{2b_2^2\theta\varkappa_2(1-2b_2^2\theta^2)}{R^*+r} \left[f_2(\tau-\lambda_2 y) + \right.$$

$$\left. + \frac{2r}{R^*+r} \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^{k-1} f_2(\tau-\lambda_2 y+kh) \right] +$$

$$+ \frac{8b_2^4\theta^2\varkappa_2\lambda_2}{R^*+r} \left[\frac{R+r}{8b_2^4\theta^2\varkappa_2\lambda_2} g_2(\tau-\lambda_2 y) - \right.$$

$$\left. - \frac{2r}{R^*+r} \sum_{k=1}^{\infty} (-m)^{k-1} g_2(\tau-\lambda_2 y+kh) \right].$$

Можно проверить, что найденная система функций действительно удовлетворяет всем поставленным условиям.

3. Пусть теперь $1/a_2 < \theta < 1/b_2$. Общий вид решений системы (1′) и (2′) будет:

$$\varphi_1(\tau, y) = f_1(\tau+\varkappa_1 y) + \tilde{f}_1(\tau-\varkappa_1 y),$$
$$\varphi_2(\tau, y) = f_2(\tau+i\varkappa_2 y) + \bar{f}_2(\tau-i\varkappa_2 y),$$
$$\psi_2(\tau, y) = g_2(\tau+\lambda_2 y) + \tilde{g}_2(\tau-\lambda_2 y). \tag{7}$$

При некоторых предположениях относительно входящих сюда функций из соотношений, доставляемых граничными условиями

$$f_1(\tau+h) + \tilde{f}_1(\tau) = 0,$$
$$\varkappa_1 [f_1'(\tau) - \tilde{f}_1'(\tau)] = i\varkappa_2 [f_2''(\tau) - \bar{f}_2''(\tau)] - \theta [g_2''(\tau) + \tilde{g}_2''(\tau)],$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} [f_1'(\tau) + \tilde{f}_1'(\tau)] =$$
$$= (1-2b_2^2\theta^2) [f_2''(\tau) + \bar{f}_2''(\tau)] - 2b_2^2\theta\lambda_2 [g_2''(\tau) - \tilde{g}_2''(\tau)],$$
$$2i\theta\varkappa_2 [f_2''(\tau) - \bar{f}_2''(\tau)] + (1-2b_2^2\theta^2) [g_2''(\tau) + \tilde{g}_2''(\tau)] = 0,$$

следует функциональное уравнение

$$m f_2(z+h) + f_2(z) = \frac{2ib_2^2\theta\lambda_2(1-2b_2^2\theta^2)}{\pi(R'-ir)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2(\tau+h) - g_2(\tau)}{z-\tau} d\tau, \tag{8}$$

где использованы сокращенные обозначения $R' = R_1 + iR_2 = (1 - 2b_2^2\theta^2)^2 - 4ib_2^4\theta^2\varkappa_2\lambda_2$, $z = \tau + i\varkappa_2 y$, $m = (R'+ir)/(R'-ir)$.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее требованиям, предъявленным к $f_2(z)$, имеет вид

$$f_2(z)=\frac{2\,i\,b_2^2\,\theta\,\lambda_2\,(1-2b_2^2\,\theta^2)}{\pi\,(R'-ir)}\sum_{k=0}^{\infty}(-m)^k\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+kh-\tau}+\right.$$

$$\left.+\ \frac{1}{z+kh+h-\tau}\right)g_2(\tau)\,d\tau.$$

Окончательные выражения искомых потенциалов могут быть представлены в форме:

$$\varphi_1(\tau,y)=\frac{2\,\rho_2\,b_2^2\,\theta\lambda_2}{\pi\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1)\chi}{\rho^{k+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{g_2'(s)}{\tau-\varkappa_1 y+kh-s}+\right.$$

$$+\frac{g_2'(s)}{\tau+\varkappa_1 y+kh+h-s}-\frac{g_2'(s)}{\tau-\varkappa_1 y+kh+h-s}-$$

$$\left.-\frac{g_2'(s)}{\tau-\varkappa_1 y+kh+2h-s}\right)ds-$$

$$-\frac{2\,\rho_2\,b_2^2\,\theta\lambda_2}{\rho_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k+1)\chi}{\rho^{k+1}}\,[g_2'(\tau+\varkappa_1 y+kh)+g_2'(\tau+\varkappa_1 y+kh+h)-$$

$$-g_2'(\tau-\varkappa_1 y+kh+h)-g_2'(\tau-\varkappa_1 y+kh+2h)]-$$

$$-\frac{2\,\rho_2\,b_2^2\,\theta\lambda_2}{\rho_1}\,[g_2'(\tau+\varkappa_1 y)+g_2'(\tau-\varkappa_1 y+h)],$$

$$\varphi_2(\tau,y)=\mathrm{Re}\left\{\frac{4\,i\,b_2^2\,\theta\lambda_2\,(1-2b_2^2\,\theta^2)}{\pi\,(R'-ir)}\sum_{k=0}^{\infty}(-m)^k\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\tau+i\,\varkappa_2 y+kh-s}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\tau+i\varkappa_2 y+kh+h-s}\right)g_2(s)\,ds\right\},$$

$$\psi_2(\tau,y)=$$

$$\frac{8\,b_2^4\,\theta^2\,\varkappa_2\,\lambda_2}{\pi\,[R_1^2+(R_2-r)^2]}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_1\cos k\chi+(R_2-r)\sin k\chi}{\rho^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{g_2(s)}{\tau-\lambda_2 y+kh-s}+\right.$$

$$\left.+\frac{g_2(s)}{\tau-\lambda_2 y+kh+h-s}\right)ds+$$

$$+\frac{8\,b_2^4\,\theta^2\,\varkappa_2\,\lambda_2}{R_1^2+(R_2-r)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_1\sin k\chi+(R_2-r)\cos k\chi}{\rho^k}\,[g_2(\tau-\lambda_2 y+kh)+$$

$$+g_2(\tau-\lambda_2 y+kh+h)]+g_2(\tau+\lambda_2 y)-g_2(\tau-\lambda_2 y),$$

причем ρ и χ определяются формулой $-m=(\cos\chi+i\sin\chi)/\rho$. Встречающиеся здесь интегралы понимаются в смысле главного значения.

Исследование, результаты которого изложены здесь, представляет собой обобщение и дальнейшее развитие результатов С. Л. Соболева ([1], [2]), относящихся к отражению плоских волн от свободной границы полупространства, и близко стоит к исследованиям В. Г. Гоголадзе ([3], [4]) и Д. И. Шерман ([5]).

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Поступило
11 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. XII, § 1, 1937. [2] С. Л. Соболев, Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, № 18 (1932). [3] В. Г. Гоголадзе, ДАН, **49**, № 5 (1945). [4] В. Г. Гоголадзе, ДАН, **49**, № 7 (1945). [5] Д. И. Шерман, Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, № 115 (1945).