Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Э. С. ЦИТЛАНАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА И ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 X 1946)

Ряд проблем о собственных значениях некоторых нелинейных операторов связан с экстремальными задачами функционалов, в частности с аналогом „принципа критической точки" для условного экстремума [1, 2]. Пользуясь вариационными методами и особым топологическим аппаратом, московская математическая школа установила ряд теорем для нелинейных операторов достаточно широкого класса.

В работе [3] исследуется решение одной задачи для операторов вариационного типа, для чего обобщается „принцип критической точки", доказанный для конечномерных многообразий Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом [4], на случай условного экстремума в гильбертовом пространстве.

В настоящей статье дополняются результаты работы [3]: мы обобщаем „условный принцип критической точки" на случай банаховского пространства (B) [5], с одной стороны, а с другой стороны, — приводим некоторые новые теоремы о нелинейных операторах, порожденных дифференциалом Фреше слабо непрерывного функционала в пространстве Гильберта, связанные с теорией собственных значений.

1. Пусть в пространстве типа (B) дано многообразие N:

$$\varphi_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $b \subset (B)$ и $\varphi_i(b)$ — функционалы, имеющие дифференциалы в смысле Фреше первого и второго порядка $d\varphi_i(b; h)$ и $d^2\varphi_i(b; h)$ в каждой точке N, т. е. существуют, соответственно, главные линейные и квадратичные относительно h части приращений $\varphi_i(b+h) - \varphi_i(b)$ и $\varphi_i(b+h) - \varphi_i(b) - d\varphi_i(b; h)$. Предполагаем, что ни одно из уравнений (1) не есть следствие остальных.

Пусть f — функционал, определенный на N и в некоторой окрестности многообразия N, имеющий дифференциал в смысле Фреше также первого и второго порядка.

Назовем совокупность N_b векторов h, удовлетворяющих системе

$$d\varphi_i(b; h) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

касательным многообразием к N в точке b. Точку $b_0 \subset N$ назовем критической точкой функционала f на N, если для всех h из N_b

$$df(b_0; h) = 0.$$

Значение f в критической точке будем называть критическим значением.

Пусть $[M]$ — некоторый топологический класс на $N, c = \inf\limits_{[M]} \max\limits_{M} f$, где $M \subset [M]$, M_0 — минимальное множество ([3]). Обозначим через $A = M_0 \times (f = c)$, где $(f = c)$ — множество точек поверхности уровня.

Теорема 1. *Компактное пересечение $A = M_0 \times (f = c)$ содержит по крайней мере одну критическую точку.*

Доказательство. Допустим противное: $df(b; h) \neq 0$ для всех $b \subset A$. Рассмотрим конечную последовательность $n + 1$ векторов $h_1, h_2, \ldots, h_n, h$ в точке b, удовлетворяющих условиям:

$$d\varphi_i(b; h_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j, \end{cases}$$

и

$$d\varphi_i(b; h) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Система (1) относительно векторов $h_1, h_2, \ldots, h_n$, h определяет кривую l_b в пространстве N_{n+1}, высекаемую из N. Совокупность точек $b' \subset A$, для которых $\rho(b; b') < \varepsilon$, назовем ε-окрестностью точки b.

Пусть $df(b; h) < 0$. В точке b существует касательный вектор εh к кривой l_b длины ε ($\|h\| = 1$), по которой функционал f убывает. Следовательно, он убывает также во всех точках кривой l_b, достаточно близких к b. Существует некоторая ε-окрестность точки b такая, что в каждой точке b' этой окрестности существует кривая $l_{b'}$, вдоль которой функционал f убывает. Внутри ε-окрестности точки b построим сферу $S(b; \alpha)$ радиуса $\alpha < \varepsilon/2$.

Введем локальную непрерывную деформацию D_b точек множества $M_0 \times S(b; \alpha)$ следующим образом: 1) точку b сдвинем по кривой l_b на расстояние $q < \alpha$ в сторону меньших значений f; 2) каждую точку $b' \subset [S(b; \alpha) - b] \times M_0$ сдвинем по соответствующей кривой на расстояние $q' = \frac{\alpha - \rho(b; b')}{\alpha} q$ в сторону меньших значений f.

Для каждой точки $b \subset A$ можно построить соответствующую деформацию D_b. Множество A можно покрыть конечным числом сфер $S(b_i; \alpha_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, которым отвечают деформации D_{b_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Пусть

$$D = \prod_i D_{b_i}.$$

Деформация D переводит множество M_0 в множество $M_1 \subset [M]$, на котором $f < c$. Это противоречит определению c. Теорема доказана.

2. Рассмотрим обыкновенное гильбертово пространство H. Через 0_H обозначим нулевой элемент. Назовем единичной сферой S_1 совокупность $a \subset H$, для которой $\|a\| \leqslant 1$. Множество элементов $a \subset S_1$, для которых $\|a\| = 1$, составляет поверхность S_1.

Пусть f — функционал, определенный в H и имеющий в каждой точке $a \subset H$ дифференциал в смысле Фреше $df(a; h)$. В гильбертовом пространстве $df(a; h)$ имеет вид

$$df(a; h) = (La, h),$$

и соответствие $a \to La$ для любого $a \subset S_1$ определяет оператор La с областью значений в H. Оператор La, порожденный дифференциалом Фреше, будем называть симметрическим. Функционал f предполагаем слабо непрерывным ([6]). Очевидно, каждый вектор $a \subset H$ с компонентами $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ можно представить в виде:

$$a = A_n(a) + R_n(a),$$

где

$$A_n(a) = (a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots),$$

$$R_n(a) = (0, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots).$$

Лемма 1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое целое $N = N(\varepsilon)$, что для $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех $a_n \subset S_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет место неравенство*

$$|f(A_n(a_n)) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Оператор La, порожденный дифференциалом Фреше слабо непрерывного функционала f с ограниченным остатком, именно $f(a+h) - f(a) = df(a; h) + \omega(a; h)$, где $|\omega(a; h)| \leqslant k\|h\|^2$, есть вполне непрерывный (имеет место и обратная теорема).*

Доказательство. Достаточно доказать, что для произвольного положительного ε существует такое целое $N(\varepsilon)$, зависящее только от ε, но не от вектора La, что

$$\|R_n La\| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Очевидно,

$$f(a + \mu R_n La) - f(a) = \mu(La, R_n La) + \omega(a; \mu R_n La), \tag{2}$$

где μ — пока произвольное число и

$$\|\omega(a; \mu R_n La)\| \leqslant k\mu^2 \|R_n La\|^2,$$

k — некоторая константа. В силу очевидных равенств

$$(La, R_n La) = \|R_n La\|^2, \quad A_n(a + \mu R_n La) = A_n a$$

из (2) получаем

$$\mu\|R_n La\|^2 = f(a + \mu R_n La) - f(A_n(a + \mu R_n La)) + f(A_n a) - f(a) -$$
$$- \omega(a; \mu R_n La).$$

В силу леммы 1 отсюда легко вытекает

$$(\mu - \mu^2 k)\|R_n La\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4k};$$

полагая $\mu = 1/2k$, окончательно имеем

$$\|R_n La\| < \varepsilon.$$

В дальнейшем предполагаем, что $La = \theta_H$ лишь для $a = \theta_H$. a называется собственным элементом оператора L, если $La = \lambda a$ (λ — скаляр).

Лемма 2. *Для всякого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a \subset S_1$ такой, что*

$$\|La - (La, a)a\| < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Вполне непрерывный оператор L, порожденный дифференциалом Фреше слабо непрерывного функционала f, имеет*

2*

собственный элемент $a: La=\lambda a$, где $\lambda=(La, a)$ и если $\lambda\neq 0$, то a лежит на поверхности сферы S_1.

Доказательство. Существование собственного элемента легко вытекает из леммы 2.

Покажем, что норма собственного элемента равна 1.

В силу леммы 2 и вполне непрерывности L, если последовательность $\{a_i\}$ принадлежит поверхности S_1, последовательность $\{La_i-(La_i, a_i)\,a_i\}$ сильно сходится к θ_H:

$$La_i-(La_i, a_i)\,a_i \Longrightarrow \theta_H\,.$$

Пусть $(La_i, a_i)=\lambda+\delta_i$, где $\lim\limits_{i\to\infty}\delta_i=0$.

Имеем

$$La_i-\lambda a_i-\delta_i a_i \Longrightarrow \theta_H\,.$$

Так как

$$\lim_{i\to\infty}\|\delta_i a_i\|=0\,,$$

поэтому

$$\frac{La_i}{\lambda}-a_i \Longrightarrow \theta_H.$$

В силу компактности множества $\left\{\frac{La_i}{\lambda}\right\}$ оно сильно сходится к некоторому элементу a: $a-a_{n_i}\Longrightarrow\theta_H$, следовательно,

$$\|a_{n_i}\|\Longrightarrow\|a\|=1\,.$$

3. Теорема 3 содержит в себе как частный случай теорему Лихтенштейна ([7]) о существовании по крайней мере для одного значения λ тождественно не исчезающего решения нелинейного интегрального уравнения

$$\lambda\varphi(s)=\sum_{n}^{1\ldots\infty}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}K_n(s, s_1,\ldots, s_n)\,\varphi(s_1)\ldots\varphi(s_n)\,ds_1\ldots ds_n,$$

где $K_n(s, s_1,\ldots, s_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ — действительные, непрерывные в интервале $(0,\pi)$, определенные для всех значений аргументов, симметрические функции, для которых ряд

$$\sum_{n}^{1\ldots\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\max\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}K_n^2(s, s_1,\ldots, s_n)\,ds_1\ldots ds_n\right)^{1/2}$$

сходится.

Поступило
13 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Lusternik et L. Schnirelmann, C. R. (1929). [2] L. Lusternik, Monatsh. f. Math. u. Physik, **37** (1930). [3] Э. С. Цитланадзе. ДАН, **53**, № 4 (1946). [4] Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман. Топологические методы в вариационных задачах, 1930. [5] S. Banach, Thèorie des opérations linéaires, 1932, p. 53. [6] Л. А. Люстерник, Усп. математич. наук, в. 1, 121 (1932). [7] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und integrodifferential Gleichungen nebst Anwendungen, 1931, S. 141.