Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 1

МАТЕМАТИКА

С. И. РАППОПОРТ

ОБ ОДНОМ ПРОЦЕССЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 X 1946)

Пусть дана конечная функция $f(x)$, заданная на $[0, 2\pi]$. Построим тригонометрический полином

$$V_n(f, x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)}) \cos^{2n} \frac{x_k^{(n)} - x}{2},$$

где

$$x_k^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1} k.$$

Последовательность $V_n(f, x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ можно рассматривать как аппарат приближения функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами.

В настоящей заметке приводятся некоторые результаты, относящиеся к характеру приближения функций последовательностью полиномов $V_n(f, x)$ и сходными аналитическими выражениями. При этом, как естественно ожидать, характер приближения зависит от структурных свойств апроксимируемой функции.

1. Если функция $f(x)$ ограничена на $[0, 2\pi]$ и непрерывна в точке x $(0 < x < 2\pi)$, то

$$\lim_{n \to \infty} V_n(f, x) = f(x). \tag{1}$$

В случае непрерывности и 2π-периодичности функции $f(x)$ равенство (1) выполняется на всей оси равномерно относительно x.

2. Если функция $f(x)$ ограничена и 2π-периодична, то точность приближения функций $f(x)$ полиномами $V_n(f, x)$ характеризуется неравенством

$$|V_n(f, x) - f(x)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[3 + \frac{2\pi}{\sqrt{2n+1}}\right],$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

При этом порядок оценки окончательный.

3. Если функция $f(x)$ ограничена и имеет в точке x_0 $(0 < x_0 < 2\pi)$ конечную вторую производную $f''(x_0)$, то

$$\lim_{n \to \infty} n\,[V_n(f, x_0) - f(x_0)] = f''(x_0).$$

4. Если функция $f(x)$ ограничена, 2π-периодична и имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$, то

$$\lim_{n \to \infty} V'_n(f, x_0) = f'(x_0).$$

5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема (L) на $[0, 2\pi]$.
Положим

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} V'_n(F, x_0) = f(x_0)$$

в каждой точке x_0 $(0 < x_0 < 2\pi)$, в которой

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = f(x_0). \tag{2}$$

6. Пусть функция $f(x)$ интегрируема (L) на $[0, 2\pi]$.
Положим

$$\overline{V}_n(f, x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{2n+1}{2\pi} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(t)\, dt\right] \cos^{2n} \frac{x_k^{(n)} - x}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \overline{V}_n(f, x_0) = f(x_0)$$

в каждой точке x_0, в которой выполнено условие (2).

7. Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция.
Положим

$$V^*_n(f, x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ \mathrm{m}_{x_k^{(n)} - 3n^{-1/3}}^{x_k^{(n)} + 3n^{-1/3}} \cdot \mathrm{m}.\ [f(x)]_n \right\}^* \cos^{2n} \frac{x_k^{(n)} - x}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} V^*_n(f, x_0) = f(x_0)$$

в каждой точке апроксимативной непрерывности $f(x)$.

Здесь $\mathrm{m}_a^b \cdot \mathrm{m} \cdot f(x)$ означает среднее метрическое $f(x)$ на промежутке (a, b)*.

Поступило
23 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Мат. сб., 41: 3, 503 (1934).

---

* Средним метрическим $f(x)$ на промежутке (a, b) называется число h такое, что при любом $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\mathrm{m}E\,[f(x) \geqslant h] \geqslant \frac{b-a}{2}, \qquad \mathrm{m}E\,[f(x) \geqslant h + \varepsilon] < \frac{b-a}{2}.$$

Это понятие введено Л. В. Канторовичем ([1]).