Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ и Н. А. ДМИТРИЕВ

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Постановка вопроса

Будем рассматривать совокупность объектов (например, молекул) каких-либо n типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$ и предположим, что один объект типа T_k за промежуток времени (t_1, t_2) превращается с вероятностью $P_k^{\alpha}(t_1, t_2) = P(T_k \to S_\alpha \mid t_1, t_2)$ в совокупность

$$S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \ldots + \alpha_n T_n,$$

состоящую из α_1 объектов первого типа, α_2 объектов второго типа и, вообще, α_i объектов i-го типа. Случайный процесс, состоящий из такого рода превращений, называется ветвящимся, если вероятности $P_k^{\alpha}(t_1, t_2)$ однозначно определяются заданием моментов времени $t_1 < t_2$, номера исходного типа $k = 1, 2, \ldots, n$ и n-мерного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с целочисленными компонентами $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots$

Существенным здесь является допущение, что вероятности независимы от:

1) способа и времени возникновения исходного объекта типа T_k, про который лишь предполагается, что он существует в момент времени t_1,

2) судьбы могущих входить в рассмотрение других объектов типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$, отличных от данного в момент времени t_1 объекта типа T_k и объектов, возникающих из него при $t > t_1$.

Изложенная сейчас теоретико-вероятностная схема может иметь разнообразные применения в биологии, химии и физике элементарных частиц. В частности, в химии под нее могут быть подведены начальные стадии самых разнообразных химических реакций. В самом деле, в начальной стадии химической реакции обычно можно считать концентрации одних типов молекул $T_1', T_2', \ldots, T_m'$ большими, но приближенно постоянными, концентрации же других типов $T_1'', T_2'', \ldots, T_n''$ переменными, но весьма малыми. В этих предположениях встреча двух молекул типов T'' практически невозможна, результаты же встреч одной молекулы одного из типов T'' с одной или несколькими молекулами типов T' в отношении числа возникающих молекул типов T'' приближенно подчиняются сформулированным выше требованиям.

В химических и физических вопросах естественно применять вариант нашей схемы с „непрерывным временем“, предполагая вероятности $P_k^{\alpha}(t_1, t_2)$ дифференцируемыми по t_1 и t_2. Дифференциальные уравнения, которые мы получаем в этом предположении в § 3 этой работы для частного случая „мономолекулярных“ реакций ($P_k^{\alpha}(t_1, t_2) > 0$ только при $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$), были ранее указаны М. А. Леонтовичем ([1]). В биологических вопросах естественен другой подход с „дискретным временем“, где „время“ t принимает лишь целые значения и обозначает номер поколения. В этом варианте излагаемые далее результаты были для случая $n=1$ получены R. A. Fisher'ом (2). Исследования Фишера были продолжены J. F. Steffensen'ом (3) и одним из авторов настоящей заметки (4).

§ 2. Основное функциональное уравнение

В силу общих принципов теории вероятностей $P_k^\alpha(t_1,t_2)$ подчинены условиям

$$P_k^\alpha(t_1,t_2) \geqslant 0, \tag{I}$$

$$\sum_\alpha P_k^\alpha(t_1,t_2) = 1. \tag{II}$$

Считая эти вероятности определенными при любых $t_1 \leqslant t_2$, для $t_1 = t_2$ естественно принять

$$P_k^\alpha(t,t) = E_k^\alpha = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ если } \alpha_k = 1;\ \alpha_i = 0,\ i \neq k, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях} \end{array} \right\} \tag{III}$$

Наконец, в силу сделанных выше допущений вероятности $P_n^\alpha(t_1,t_2)$ удовлетворяют при любых

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$$

уравнению

$$P_k^\beta(t_1,t_3) = \sum_\alpha P_k^\alpha(t_1,t_2) P_\alpha^\beta(t_2,t_3), \tag{IV}$$

где

$$P_\alpha^\beta(t_1,t_2) = P(S_\alpha \to S_\beta \mid t_1,t_2)$$

означает вероятность превращения за промежуток времени (t_1,t_2) совокупности

$$S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \ldots + \alpha_n T_n$$

в совокупность

$$S_\beta = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \ldots + \beta_n T_n.$$

Вероятности $P_\alpha^\beta(t_1,t_2)$ допускают выражение через вероятности $P_k^\alpha(t_1,t_2)$:

$$P_\alpha^\beta(t_1,t_2) = \sum \prod_{i=1}^{n} \prod_{s=1}^{\alpha_i} P_i^{\beta(i,s)}(t_1,t_2), \tag{IVa}$$

где суммирование распространяется на все такие наборы векторов

$$\beta(i,s) = (\beta_1(i,s), \beta_2(i,s), \ldots, \beta_n(i,s))$$

с целыми неотрицательными компонентами $\beta_k(i,s)$, для которых

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{\alpha_i} \beta(i,s) = \beta^*. \tag{IVb}$$

Формулы (I) — (IV) заключают в себе полный перевод понятия „ветвящегося случайного процесса", определенного в § 1 на языке теории вероятностей, на язык чистого анализа.

Из (IV) и (IVa) вытекает, что вероятности $P_\alpha^\beta(t_1,t_2)$ удовлетворяют основному уравнению марковских процессов:

$$P_\alpha^\gamma(t_1,t_3) = \sum_\beta P_\alpha^\beta(t_1,t_2) P_\beta^\gamma(t_2,t_3). \tag{1}$$

Уравнение (1) вытекает и непосредственно из теоретико-вероятностных предпосылок § 1. Уравнение (IV) по существу является лишь частным случаем уравнения (1). Это замечание показывает, что наши

---

* В формулах (IVa) и (IVb) в случае $\alpha_i = 0$ соответствующее произведение полагается равным единице, а соответствующая сумма равной нулю.

„ветвящиеся случайные процессы" по существу являются лишь частным случаем марковских процессов со счетным множеством состояний. Для этого частного случая мы получим, однако, аналитический аппарат значительно более эффективный, чем тот, который может быть развит для общего случая марковских процессов со счетным множеством состояний. С этой целью мы введем производящие функции

$$F_k(t_1,t_2;\ x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha} P_k^{\alpha}(t_1,t_2)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Целесообразно n функций F_k записывать как одну векторную функцию

$$F(t_1,t_2;x) = (F_1(t_1,t_2;x), F_2(t_1,t_2;x),\ldots, F_n(t_1,t_2;x))$$

векторного аргумента

$$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Смысл введения производящей функции $F(t_1,t_2;x)$ заключается в том, что при ее помощи соотношения (IV) записываются в следующей форме:

$$F(t_1,t_3;x) = F(t_1,t_2;F(t_2,t_3;x)). \tag{A}$$

Кроме основного функционального уравнения (A) и (III) для функции $F(t_1,t_2;x)$ получается еще граничное условие

$$F(t,t;x) = x. \tag{B}$$

Естественно, что функция $F(t_1,t_2;x)$ считается определенной лишь для $t_1 \leqslant t_2$. Что касается аргумента x, то он имеет чисто формальное значение, однако, из (I) и (II) во всяком случае вытекает, что $F_k(t_1,t_2;x)$ определены и аналитичны по аргументам $x_1,x_2,\ldots,x_n$ при

$$|x_i| < 1;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Особенно интересен случай процессов однородных во времени, т. е. удовлетворяющих условию

$$P_k^{\alpha}(t_1,t_2) = P_k^{\alpha}(t_2 - t_1). \tag{3}$$

В этом случае для

$$F_k(t;x) = \sum_{\alpha} P_k^{\alpha}(t)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \tag{4}$$

получаем вместо (A) и (B)

$$F(t+\tau;x) = F(t;F(\tau;x)), \tag{A$_1$}$$

$$F(0;x) = x. \tag{B$_1$}$$

§ 3. Дифференциальные уравнения для случая непрерывного времени

Допустим теперь, что

$$P_k^{\alpha}(t,t+\Delta) = E_k^{\alpha} + \Delta p_k^{\alpha}(t) + o(\Delta), \tag{V}$$

где $o(\Delta)$ бесконечно мало по сравнению с Δ. В этом случае естественно ввести производящие функции

$$f_k(t;x) = \sum_{\alpha} p_k^{\alpha}(t)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}. \tag{5}$$

Тогда при $|x_i| < r < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$F(t,t+\Delta;x) = x + \Delta f(t;x) + o(\Delta). \tag{6}$$

Полагая в (A) $t_1 = t'$, $t_2 = t' + \Delta$, $t_3 = t''$ и переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим для $F(t',t'' \ni x)$ при $t' < t''$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = f(t\ ;F). \tag{C}$$

Это дифференциальное уравнение вместе с граничным условием (B) и может быть положено в основу расчета процессов занимающего нас сейчас типа. В самом деле, $p_k^\alpha(t)$ обычно могут быть определены непосредственно из условий задачи, целью же математической теории является определение вероятностей $P_k^\alpha(t_1, t_2)$, иногда же их асимптотического поведения при $t_2 \to +\infty$. Так как функции f_k легко находятся по заданным p_k^α, а искомые P_k^α получаются из разложения функций F_k по степеням переменных x_i, то определение вероятностей P_k^α и исследование их асимптотического поведения сводится к решению уравнения (C) при граничном условии (B) и исследованию асимптотического поведения решений.

В однородном по времени случае плотности вероятностей p_k^α постоянны и функции $F_k(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ связаны с функциями

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_\alpha p_k^\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{7}$$

уравнениями

$$\frac{dF_1}{f_1(F_1, F_2, \ldots, F_n)} = \frac{dF_2}{f_2(F_1, F_2, \ldots, F_n)} = \ldots = \frac{dF_n}{f_n(F_1, \ldots, F_n)} = dt, \tag{C_1}$$

которые следует решать для $t > 0$, считая x_i постоянными при начальных условиях

$$F_k(0; x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k. \tag{B_1}$$

Часто этот метод значительно эффективнее, чем непосредственное обращение к бесконечным системам дифференциальных уравнений марковских процессов со счетным множеством состояний, получающихся из (1) при допущениях, подобных (V). Мы ограничимся здесь одним простым примером применения метода (решение той же задачи методом бесконечных систем см. у N. Arley'я ([5])).

$$n = 1,$$

$$p_1^0 = a,\ p_1^1 = -(a+b),\ p_1^2 = b,\ p_1^r = 0 \text{ при } r > 2,$$

$$f(x) = a - (a+b)x + bx^2 = (1-x)(a-bx),$$

$$\frac{dF}{(1-F)(a-bF)} = dt, \quad F = \frac{a + ce^{(b-a)t}}{b + ce^{(b-a)t}},$$

$$F(0; x) = \frac{a+c}{b+c} = x, \quad c = \frac{bx-a}{1-x},$$

$$F(t, x) = \frac{a(1-x) + (bx-a)e^{(b-a)t}}{b(1-x) + (bx-a)e^{(b-a)t}} = P_1^0(t) + P_1^1(t)x + P_1^2(t)x^2 + \ldots$$

$$P_1^0(t) = \frac{a}{b} \frac{(1 - e^{(b-a)t})}{\left(1 - \frac{a}{b} e^{(b-a)t}\right)},$$

$$P_1^k(t) = \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2 \frac{(1 - e^{(b-a)t})^{k-1}}{\left(1 - \frac{a}{b} e^{(b-a)t}\right)^{k+1}} e^{(b-a)t},$$

где $k = 1, 2, \ldots$

Поступило
20 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Леонтович, ЖЭТФ, 5, 211 (1935). [2] R. A. Fisher, The Genetical Theory of Natural Selection, Oxford Press, 1930. [3] J. F. Steffensen, Ann. Inst. H. Poincaré, 3 (1933). [4] А. Н. Колмогоров, Изв. НИИ мат. и мех. томского гос. университета, 2, 1 (1938). [5] W. Arley, On the Theory of Stochastic Processes and their Application to the Theory of Cosmic Radiation, Copenhagen (Dissertation), 1943.