Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

ОСНОВНАЯ СЕРИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 X 1946)

В этой заметке, которая является продолжением ([1]), рассмотрен класс неприводимых представлений $\mathfrak{G}$, который мы будем называть основной серией неприводимых представлений. Всюду в дальнейшем мы используем результаты и придерживаемся обозначений ([1]).

§ 1. Регулярное представление $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство функций $f(g)$ с суммируемым квадратом модуля на $\mathfrak{G}$ и со скалярным произведением

$$(f_1,f_2)=\int\limits_{\mathfrak{G}} f_1(g)\overline{f_2(g)}\,d\mu(g).$$

Введем в $\mathfrak{H}$ оператор U_{g_0}, полагая $U_{g_0}f(g)=f(gg_0)$. Из инвариантности $d\mu(g)$ следует, что U_{g_0} — унитарный оператор. Очевидно, U_{g_0} — представление $\mathfrak{G}$; оно называется регулярным представлением $\mathfrak{G}$.

В случае конечной или компактной группы регулярное представление замечательно тем, что в его разложении на неприводимые представления встречаются все, с точностью до эквивалентных, неприводимые представления данной группы. Мы увидим в дальнейшем, что это обстоятельство не имеет места в случае комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$.

§ 2. Квази-регулярное представление $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{H}'$ — гильбертово пространство функций $f(h)$ с суммируемым квадратом модуля на H (см. ([1]), п. 3, § 4) и со скалярным произведением

$$(f_1,f_2)=\int\limits_{H} f_1(h)\overline{f_2(h)}\,d\mu_r(h).$$

Оператор $V_g f(h)=f(h\bar{g})$ есть унитарное представление $\mathfrak{G}$. Мы назовем его квази-регулярным представлением $\mathfrak{G}$.

В дальнейшем мы увидим, что оно разлагается на те же неприводимые представления, что и регулярное представление, но, в отличие от последнего, содержит каждое из $U_{x;g}$ только по одному разу.

§ 3. Основная серия неприводимых представлений. Разложим V_g на неприводимые представления. В силу ([1]), п. 3, § 4,

$$\int\limits_{H}|f(h)|^2\,d\mu_r(h)=\int\limits_{Z}d\mu(z)\int\limits_{D}|\beta^{1/2}(\delta)f(\delta z)|^2\,d\mu(\delta). \qquad (1)$$

Пусть $\chi(\delta)$—характер группы D. Положим

$$f_\chi(z) = \int_D f(\delta z)\, \beta^{1/2}(\delta)\, \overline{\chi(\delta)}\, d\mu(\delta).$$

В силу известного обобщения теоремы Планшереля на коммутативные группы ([2]), (1) перепишется в виде

$$\int_H |f(h)|^2 d\mu_r(h) = \int_X d\mu(\chi) \int_Z |f_\chi(z)|^2 d\mu(z), \tag{2}$$

где $d\mu(\chi)$ — дифференциал инвариантной меры на группе X характеров группы D. Равенство (2) означает, что пространство $\mathfrak{H}$ § 2 есть континуальная прямая сумма гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_z$ функций $f(z)$ с суммируемым квадратом модуля Z.

Доопределим $\beta(\delta)$ и $\chi(\delta)$ на почти всю группу $\mathfrak{G}$, полагая для

$$g = \delta\zeta z, \beta(g) = \beta(\delta), \ \ \chi(g) = \chi(\delta),$$

и положим, кроме того,

$$\alpha_\chi(g) = \beta^{-1/2}(g)\, \chi(g).$$

Переходу от $f(h)$ к $f(h\overline{g})$ соответствует переход от $f_\chi(z)$ к $\alpha_\chi(zg) f_\chi(z\overline{g})$, где $z \to z\overline{g}$ — преобразование, описанное в ([1]), п. 3, § 4. Это означает, что V_g разлагается в континуальную прямую сумму представлений в пространстве $\mathfrak{H}_z$, определяемых формулой

$$U_{\chi,g} f(z) = \alpha_\chi(zg) f(z\overline{g}). \tag{3}$$

Таким образом, каждому характеру χ группы D соответствует представление $U_{\ ,g}$. Все эти представления унитарны.

Теорема 1. *Все представления $U_{\chi,g}$ неприводимы.*

Пусть δ^s — матрица, которая получается из δ перестановкой s ее диагональных элементов. Тогда при фиксированных χ и s равенство $\chi^s(\delta) = \chi(\delta^s)$ определяет характер χ^s группы D.

Теорема 2. *При любой перестановке s представления $U_{\chi,g}$, соответствующие χ и χ^s, эквивалентны; обратно, если $U_{\chi,g}$ и $U_{\chi',g}$ эквивалентны, то $\chi' = \chi^s$ при некотором s.*

Мы будем называть $U_{\chi,g}$, $\chi \in X$, основной серией неприводимых представлений $\mathfrak{G}$.

Формулу (3), определяющую $U_{\chi,g}$, можно выписать подробнее в параметрах z_{pq}, $p > q$, определяющих z, рассматривая $f(z)$ как функцию $f(z_{pq})$ всех параметров z_{pq}. Для этого достаточно воспользоваться равенством $z\overline{g} = k \cdot zg$, определяющим $z\overline{g}$, и формулами ([1]), II § 2.

Полагая, $z\overline{g} = z' = \| z'_{pq} \|$, в силу этих формул имеем

$$U_{\chi,g} f(z_{pq}) = |g'_2|^{m_1 + i\rho_1 - 2} |g'_3|^{m_2 - m_1 + i(\rho_2 - \rho_1) - 2} \ldots$$

$$\ldots |g'_n|^{m_{n-1} - m_{n-2} + i(\rho_{n-1} - \rho_n) - 2} g_2'^{\,-m_1} g_3'^{\,-(m_2 - m_3)} \ldots$$

$$\ldots g_n'^{\,-(m_{n-1} - m_{n-2})} f(z'_{pq}),$$

где

$$z'_{pq} = \frac{1}{g_p'} \begin{vmatrix} g'_{p,q} & g'_{p,p+1} \cdots g'_{p,n} \\ g'_{p+1,q} & g'_{p+1,p+1} \cdots g'_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots \\ g'_{z,q} & g'_{n,p+1} \cdots g'_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad p > q;$$

$$g'_p = \begin{vmatrix} g'_{p,p} & g'_{p,p+1} \cdots g'_{p,n} \\ g'_{p+1,p} & g'_{p+1,p+1} \cdots g'_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots \\ g'_{n,p} & g'_{n,p+1} \cdots g'_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$g'_{p,q} = \sum_{s=1}^{p-1} z_{ps} g_{sq} + g_{pq},$$

а $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ — целые числа и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ — действительные числа, определяющие характер χ по формуле:

$$\chi(\delta) = |\delta_2|^{m_1 + i\rho_1} \delta_2^{-m_1} |\delta_3|^{m_2 + i\rho_2} \delta_3^{-m_2} \ldots |\delta_n|^{m_{n-1} + i\rho_{n-1}} \delta_n^{-m_{n-1}}.$$

В случае $n = 2$ $U_{\chi,g}$ переходит в основную серию представлений группы Лоренца, описанную в (3).

Поступило
14 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, ДАН, **54**, № 3 (1946). [2] М. Крейн, ДАН, **30**, № 6 (1941). [3] J. Gelfand and M. Neumark, J. of Physics, **10**, № 2 (1946).