Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 7

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. АНДРОНОВ и Н. БАУТИН

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 31 V 1944)

Ряд практически интересных систем прямого регулирования, в частности многие системы, регулирующие давление и температуру, обладают следующими характерными особенностями. При анализе их работы: 1) нельзя пренебречь наличием между индикатором и регулируемым объектом промежуточного звена, обладающего процессом установления, 2) нельзя пренебречь твердым (кулоновским) трением в индикаторе, но 1) можно пренебречь массой индикатора, 2) можно пренебречь вязким трением в индикаторе. Такой вырожденный, случай общей задачи прямого регулирования был рассмотрен В. Шмидтом [1,2] при помощи численного интегрирования уравнений движения. Ниже показывается, что эта нелинейная задача может быть рассмотрена аналитически.

Аналитическое рассмотрение дополняет и уточняет результаты Шмидта в существенном пункте: оно позволяет установить условия возникновения и количественные характеристики автоколебаний, которые возможны в таких устройствах и о которых Шмидт не упоминает.

1. Уравнения движения для рассматриваемого вырожденного случая, с учетом обычных упрощений, записываются в виде*

$$-a\xi+b\eta+Q=0 \quad \{Q=-K \text{ для } d\xi/dt>0;\ Q=K \text{ для } d\xi/dt<0;\ -K\leqslant Q\leqslant K \text{ для } d\xi/dt=0\}, \tag{1}$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\sigma(\zeta-\eta), \qquad \frac{d\zeta}{dt}=-\frac{a}{b}\frac{1}{T}\xi,$$

где ξ — смещение индикатора из состояния равновесия; η—отклонение состояния промежуточного звена от равновесного; ζ—отклонение состояния объекта от равновесного; $a>0$, $b>0$ — константы, характеризующие перестановочную силу; $K>0$ — твердое трение в индикаторе; $\sigma>0$ — константа, характеризующая быстроту процесса установления в промежуточном звене; $T>0$ — временная постоянная объекта.

Положим

$$\frac{a\xi}{2K}=x,\ \frac{b\eta}{2K}=y,\ \frac{b}{2K}(\zeta-\eta)=z,\ \sigma t=t',\ \frac{1}{T\sigma}=\alpha \quad (\alpha>0)$$

---

* См. (²), стр. 100. В обозначениях Шмидта $\xi=s-s_{II}$, $\eta=z_R-z_{II}$, $\zeta=z_A-z_{II}$;

$$a=\frac{P_{max}}{s_{max}-s_{min}},\ b=\frac{P_{max}}{z_{max}-z_{min}},\ Q=R_R.$$

и будем рассматривать x, y, z как декартовы координаты.

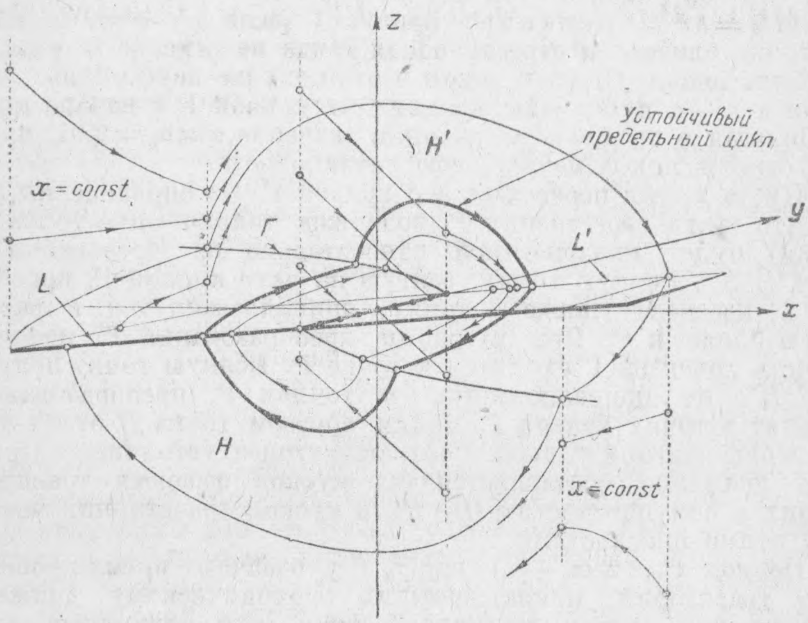
Система (1) получит тогда вид

$$dx/dt' = f(x, y, z), \quad dy/dt' = z, \quad dz/dt' = -\alpha x - z, \qquad (2)$$

где $f \equiv 0$ между плоскостями $x - y \pm {}^1/_2 = 0$ и $f \equiv z$ на полуплоскостях (H): $x - y = {}^1/_2$, $z < 0$ и (H'): $x - y = -{}^1/_2$, $z > 0$.

Мы будем исследовать решения системы (2), определяемые требованием непрерывности $x(t')$, $y(t')$, $z(t')$ в точках разрыва $f(x, y, z)$.

2. В силу (2): 1) трехмерное фазовое пространство заполнено кусками траекторий, лежащими в параллельных плоскостях $x = \mathrm{const}$; 2) разбиение полуплоскостей H и H', ограничивающих это фазовое пространство, на траектории состоит либо из кусков траек-



торий, идущих в устойчивый узел (если $4\alpha - 1 < 0$), либо из кусков спиралей (если $4\alpha - 1 > 0$); 3) отрезок $x = z = 0$, $|y| \leqslant {}^1/_2$ является отрезком покоя. Изображающая точка, двигаясь в полуплоскостях H или H', либо сразу попадает на конец отрезка покоя, либо попадает на полупрямые (L): $x - y - {}^1/_2 = 0$, $z = 0$, $x < 0$ или (L'): $x - y + {}^1/_2 = 0$, $z = 0$, $x > 0$ и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую (см. рисунок).

Назовем преобразованием S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой $L(L')$ на полуплоскость $H'(H)$, а преобразованием $E^+(E^-)$ переход точки полуплоскости $H'(H)$ на полупрямую $L'(L)$.

Преобразование $T^+ = S^+E^+$ переводит точки полупрямой L в точки полупрямой L', а преобразование $T = S^+E^+S^-E^-$ переводит L в самое себя. Таким образом *рассматриваемая пространственная задача сводится к точечному преобразованию прямой самое в себя.*

3. Преобразование S^+ преобразует полупрямую L в кривую Γ, лежащую в полуплоскости H':

$$x = \frac{1}{\alpha(1 - \tau - e^{-\tau})}, \quad z = \frac{1 - e^{-\tau}}{e^{-\tau} + \tau - 1} \quad (0 < \tau < \infty). \qquad (\Gamma)$$

Найдем в полуплоскости H' геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что преобразование E^+ не изменяет по абсолютной величине их расстояния от плоскости $x = 0$. Нетрудно показать, что все такие точки лежат на луче $z=kx$, где k определяется уравнением

$$\alpha \exp\left[\frac{2}{\sqrt{4\alpha-1}} \operatorname{arctg} \frac{k\sqrt{4\alpha-1}}{k+2\alpha}\right] = k^2+k+\alpha \quad (0 < \operatorname{arctg} < \pi). \tag{3}$$

Точки полуплоскости H' разбиваются лучом $z=kx$ на три класса: а) принадлежащие лучу $z=kx$; преобразование E^+ не изменяет их расстояния до плоскости $x=0$; б) точки, для которых $z>kx$; преобразование E^+ приближает их к плоскости $x=0$; в) точки, для которых $z<kx$; преобразование E^+ удаляет их от плоскости $x=0$.

Если $z=kx$ не пересекает кривую Γ (если $k<-\alpha$), то преобразование $T^+=S^+E^+$ приближает точки кривой Γ к плоскости $x=0$. Отрезок покоя в этом случае устойчив.

Если $z=kx$ пересекает кривую Γ (если $k>-\alpha$), то каждая достаточно близкая к отрезку покоя точка на отрезке L удаляется от отрезка покоя. Отрезок покоя в этом случае неустойчив.

При $k=-\alpha$ луч $z=kx$ касается кривой Γ в начале координат. Полагая в (3) $k=-\alpha$, находим значение $\alpha=\alpha_0=3{,}04$, при котором отрезок покоя меняет свою устойчивость.

4. Пусть $z=kx$ пересекается с кривой Γ. Из определения k следует, что точка пересечения P (возможна только одна точка пересечения) будет инвариантной относительно преобразования $T'=E^+S^-E^-S^+$. Всякую точку, взятую на дуге кривой Γ, преобразование T' переведет также в точку, принадлежащую Γ и расположенную ближе к P. При итерации преобразования T' последовательность точек на Γ сходится к точке P. Всякую точку полуплоскости H', не принадлежащую к точкам Γ, преобразование T' переводит в точку кривой Γ. Таким образом точка P будет устойчивой инвариантной точкой. Соответствующее устойчивое периодическое движение составляется из кусков фазовых траекторий, лежащих в полуплоскостях H и H', и кусков траекторий, лежащих между этими плоскостями.

5. Период $\tau^*=2(\tau_0+\tau_1)$, где τ_0 и τ_1 означают время пробега по кускам траекторий, принадлежащих периодическому движению, соответственно между полуплоскостями и в полуплоскостях H и H', можно представить в виде

$$\tau^* = 2\ln\left\{\frac{k^2+k+\alpha}{k+\alpha}\right\},$$

где k находится по формуле (3). τ^* неограниченно возрастает, когда периодическое движение стягивается к отрезку покоя.

6. Процесс регулирования, как показано выше, будет сходиться при всех начальных условиях к состоянию покоя, если $\alpha<3{,}04$. Если же $\alpha>3{,}04$, то в системе регулирования возникают автоколебания, количественные характеристики которых легко могут быть найдены.

В рассматриваемой системе твердое (кулоновское) трение обусловливает появление неустойчивости и возникновение автоколебаний, так как при $Q\equiv 0$ состояние покоя устойчиво для всех значений α и автоколебания отсутствуют*.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета
и Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступило
31 V 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Schmidt, Z. V. D. I., 81, 1425 (1937). [2] W. Schmidt, Unmittelbare Regelung, Berlin, 1939.

* Эти утверждения связаны с принятой нами идеализацией. Если мы предположим, что масса индикатора $m \neq 0$, то при $Q\equiv 0$ состояние равновесия неустойчиво для любых α и m.