Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. И. ПЕТРАШЕНЬ

РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СЛУЧАЕ ШАРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 III 1944)

Строится система векторных функций для сферических областей, называемая системой шаровых векторов, применение которой делает решение векторных задач математической физики тождественным с решением однотипных скалярных задач при условии, если решение последних ищется в виде разложения по шаровым функциям.

1. Пусть $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ — обычная система ненормированных сферических функций.

Шаровыми векторами будем называть следующее семейство линейно независимых векторов:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{Y}^0_{lm} = [\mathbf{r}\operatorname{grad} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] \quad (l=1, 2, \ldots), \\ &\mathbf{Y}^{+1}_{lm} = (l+1)\,\mathbf{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - r\operatorname{grad} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (l=0, 1, 2, \ldots), \\ &\mathbf{Y}^{-1}_{lm} = l\,\mathbf{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + r\operatorname{grad} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (l=1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Шаровые векторы $\mathbf{Y}^{\nu}_{lm}(\vartheta, \varphi)$, значок ν в которых имеет значения 0, $+1$ и -1, обнаруживают следующие свойства.

a. Свойство ортогональности на сфере (ϑ, φ):

$$\int \left({}_0\mathbf{Y}^{\nu}_{lm}\ {}_0\mathbf{Y}^{\nu_1}_{l_1 m_1} \right) d\Omega = 0, \tag{2}$$

если (ν, l, m) и (ν_1, l_1, m_1) отличаются друг от друга хотя бы одним значком.

b. Свойство апроксимаций произвольной векторной функции $\mathbf{U}(\vartheta, \varphi)$ рядом:

$$\mathbf{U} = \sum_{\substack{l=0 \\ |m| \leqslant l}}^{\infty} a^0_{lm}\mathbf{Y}^0_{lm}(\vartheta, \varphi) + a^{+1}_{lm}\mathbf{Y}^{+1}_{lm}(\vartheta, \varphi) + a^{-1}_{lm}\mathbf{Y}^{-1}_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{3}$$

c. Свойство давать векторный гармонический полином порядка $l+\nu$ путем умножения шарового вектора $\mathbf{Y}^{\nu}_{lm}$ на степень $r^{l+\nu}$. Последнее свойство можно положить в основу определения семейства (1).

2. Часто возникают задачи, в которых приходится представлять вектор $\mathbf{U}$ в виде суммы потенциального и соленоидального векторов, т. е. $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$, где $\operatorname{rot}\mathbf{U}_1 = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{U}_2 = 0$.

Применяя операции div и rot к (lm)-му члену разложения (3) потенциального вектора, получим:

$$\mathbf{U}_1 = \sum_{\substack{l=0 \\ |m| \leqslant l}}^{\infty} \Phi_{lm}^{+1}(r, t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{+1} + \Phi_{lm}^{-1}(r, t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{-1}, \tag{4}$$

где функции Φ_{lm}^{+1} и Φ_{lm}^{-1} связаны друг с другом следующим соотношением:

$$\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial r} - \frac{l-1}{r} \Phi^{-1} = \frac{\partial \Phi^{+1}}{\partial r} + \frac{l+2}{r} \Phi^{+1}. \tag{5}$$

Подобно этому представление соленоидального вектора имеет вид:

$$\mathbf{U}_2 = \sum_{\substack{l=0 \\ |m| \leqslant l}}^{\infty} \varphi_{lm}^{0}(r, t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{0} + f_{lm}^{+1}(r, t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{+1} + f_{lm}^{-1}(r, t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{-1}, \tag{6}$$

где φ_{lm}^{0} произвольно, а функции f_{lm}^{+1} и f_{lm}^{-1} подчинены условию:

$$(l+1)\left(\frac{\partial f^{+1}}{\partial r} + \frac{l+2}{r} f^{+1}\right) + l\left(\frac{\partial f^{-1}}{\partial r} - \frac{l-1}{r} f^{-1}\right) = 0. \tag{7}$$

Представление вектора $\mathbf{U}$ в виде суммы векторов (4) и (6) единственно с точностью до лапласового вектора.

3. Рассмотрим решение волнового уравнения:

$$\Delta \mathbf{U} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

в случае шара $0 \leqslant r \leqslant R$ при нулевых начальных данных:

$$\mathbf{U}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\Big|_{t-0=0} = 0 \tag{9}$$

и простейших условиях на границе:

$$\mathbf{U}|_{r=R} = \mathbf{U}_0(\theta, \varphi, t). \tag{10}$$

Заданный на поверхности шара вектор $\mathbf{U}_0$ представим в виде разложения по шаровым векторам

$$\mathbf{U}_0 = \sum_{\substack{l=0 \\ |m| \leqslant l}}^{\infty} a_{lm}^{0}(t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{0} + a_{lm}^{+1}(t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{+1} + a_{lm}^{-1}(t)\, \mathbf{Y}_{lm}^{-1} \tag{11}$$

и будем искать решение задачи в виде ряда (3).

Подставляя (3) в уравнение (8), а также в условия (9) и (10), приходим к задаче интегрирования уравнений:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\varphi_n = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (n = l + \nu) \tag{12}$$

в промежутке $0 \leqslant r \leqslant R$ и $t \geqslant 0$ при нулевых начальных данных:

$$\varphi_n(r, t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\Big|_{t-0=0} = 0 \tag{13}$$

и следующих условиях на границе:

$$\varphi_n(R,\ t) = a(t). \tag{14}$$

4. Установим класс непрерывных решений уравнения (12) в промежутке $0 \leqslant r \leqslant R$, годных для всех значений времени $t \geqslant 0$, предполагая, что граничные условия подчинены условию плавности включения, т. е.

1°. $a(t)$ и $a'(t)$ непрерывны и обращаются в нуль при $t = 0$,

2°. $a''(t)$ кусочно непрерывна.

Обобщая метод, предложенный акад. Смирновым (1), естественно искать решение в виде:

$$\varphi_n(r,\ t) = \int\limits_0^{t-cr} \omega_{1n}(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau}{cr}\right) d\tau + \int\limits_0^{t-cR+cr} \omega_n(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{\tau = cR - t}{cr}\right) d\tau,$$

выбирая ω_{1n} и ω_n так, чтобы решение удовлетворяло условию конечности при $r = 0$. Пользуясь свойствами симметрии функций $Q_{n+1}(x)$, нетрудно видеть, что условие конечности будет выполнено только в том случае, если

$$\omega_{1n}(\tau) = 0 \text{ при } \tau < cR,$$

а также если

$$\omega_{1_{2\nu}}(\tau + cR) = \omega_{2\nu}(\tau), \quad \omega_{1_{2\nu+1}}(\tau + cR) = -\,\omega_{2\nu+1}(\tau) \text{ при } \nu \geqslant 0,$$

что выражает закон отражения возмущений от начала координат.

Искомое решение при этом представится формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\text{при } n = 0\\
&\varphi_0(r,\ t) = \int\limits_{t-cR-cr}^{t-cR+cr} \omega_0(\tau)\left(\frac{\tau + cR - t}{cr} - 1\right) d\tau + 2\int\limits_0^{t-cR-cr} \omega_0(\tau)\, d\tau,\\
&\text{при } n \geqslant 1\\
&\varphi_n(r,\ t) = \int\limits_{t-cR-cr}^{t-cR+cr} \omega_n(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{\tau + cR - t}{cr}\right) d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что решения (15) удовлетворяют уравнению (12) при любых кусочно непрерывных $\omega_n(\tau)$ и удовлетворяют начальным условиям, если $\omega_n(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Эти решения непрерывны вместе с первыми производными при $r \geqslant \varepsilon > 0$. В точке $r = 0$ все $\varphi_n = 0$, если $n \geqslant 1$, и конечны при $n = 0$; первые производные в окрестности этой точки ограничены при всех значениях $t > 0$, причем эти производные в случае $n \geqslant 2$ равны нулю всегда, кроме определенных моментов времени.

Не представляет труда убедиться, что решение задачи при указанных условиях единственно.

5. Чтобы (15) было решением задачи, необходимо определить функции $\omega_n(\tau)$ при $\tau \geqslant 0$ из граничных условий (14), которые в случае $n \geqslant 1$ принимают следующий вид:

$$\omega_n(t) - (-1)^n \omega_n(t - t_0) - \frac{1}{cR}\int\limits_{t-t_0}^{t} \omega_n(t)\, P_n'\left(\frac{\tau + cR - t}{cR}\right) d\tau = -\,cRa''(t), \tag{16}$$

где $t_0 = 2cR$.

Представляя любой момент времени t в виде суммы $t = t' + qt_0$, где q — целое число, а t' заключено в промежутке $0 \leqslant t' \leqslant t_0$, введем следующие обозначения

$$\omega_n(t' + qt_0) = \tilde{\omega}_q(t'), \qquad -cRa''(t' + qt_0) = \varphi_q(t'). \tag{17}$$

Тогда:

$$\tilde{\omega}_q(t') - \frac{1}{cR}\int_0^{t'} \tilde{\omega}_q(\tau) P_n'\left(\frac{\tau + cR - t'}{cR}\right) d\tau = \Phi_{q-1}(t'), \tag{18}$$

где функция $\Phi_{q-1}(t')$ имеет следующее значение:

$$\Phi_{q-1}(t') = \varphi_q(t') + (-1)^n \tilde{\omega}_{q-1}(t') +$$

$$+ \frac{1}{cR}\int_{t'}^{t_0} \tilde{\omega}_{q-1}(\tau) P_n'\left(\frac{\tau + cR - t' - t_0}{cR}\right) d\tau. \tag{19}$$

При $q = 0$ правая часть уравнения (18) известна и, следовательно, функция $\tilde{\omega}_0(t')$ определяется обычными методами интегрирования уравнений Вольтерра 2-го рода с ядром, зависящим от разности.

Найденная функция $\tilde{\omega}_0(t')$ определяет $\Phi_0(t')$, что позволяет найти $\tilde{\omega}_1(t')$; последняя же в свою очередь определяет $\Phi_1(t')$ и т. д.

Таким образом, для решения задачи нужно определить резольвенту $R(r - t')$ ядра $-\frac{1}{cR}P_n'\left(\frac{\tau - cR - t'}{cR}\right)$ и пользоваться методом последовательных шагов.

6. Можно построить решения уравнений (12) при меньших предположениях относительно граничных функций $a(t)$ из (14).

Будем предполагать, что $a(t)$ непрерывно при $t \geqslant 0$, обращается в нуль при $t = 0$ и имеет кусочно непрерывную производную так, что $a'(0)$ может и не равняться нулю.

Функции

$$\psi_n(r, t) = -\frac{1}{cr}\int_{t-cR-cr}^{t-cR+cr} \omega_n(\tau) P_n\left(\frac{\tau + cR - t}{cr}\right) d\tau, \tag{20}$$

полученные дифференцированием по t решений (15), очевидно, также удовлетворяют уравнению (12) при любых кусочно непрерывных $\omega_n(\tau)$, удовлетворяют нулевым начальным данным, если $\omega_n(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, и могут удовлетворить граничным условиям с разрывами в первых производных, если функции $\omega_n(\tau)$ определены подобно тому, как это делалось в п. 5. В случае непрерывных $\omega_n(\tau)$, удовлетворяющих условию $\omega_n(0) = 0$ и имеющих производную, эти решения принадлежат к классу (15).

Нетрудно убедиться, что семейство функций (20) представляет собой решения уравнения (12) с правильными сильными разрывами на характеристиках. В начале координат они остаются конечными, а их производные имеют полюсы не выше первого порядка.

Вследствие этих причин теорема об единственности остается в силе.

Ленинградская Военно-Воздушная Академия
Красной Армии

Поступило
8 III 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, ДАН, XIV, 9 (1937).