Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 7

МАТЕМАТИКА

В. ВАГНЕР

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕТРИКИ ФИНСЛЕРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1944)

Как известно, метрика Финслера будет определена в n-мерном пространстве X_n, если в каждой точке X_n, в соответствующем этой точке касательном центрально-аффинном евклидовом пространстве E_n, будет задана некоторая гиперповерхность, которая, рассматриваемая в качестве индикатрисы, определит в E_n метрику Минковского (1). Таким образом геометрия пространства Финслера эквивалентна геометрии поля локальных гиперповерхностей в X_n.

Пусть

$$x^\alpha = l^\alpha(\xi^\omega, \eta^l), \quad y_\alpha = l_\alpha(\xi^\omega, \eta^l), \tag{1}$$

$$\alpha, \beta, \ldots, \omega = 1, \ldots, n, \quad a, b, \ldots, l = 1, \ldots, n-1$$

будут уравнения индикатрис пространства Финслера F_n соответственно в точечных x^α и гиперплоскостных (тангенциальных) y_α координатах, где ξ^ω — координаты соответствующей точки F_n. Основные дифференциальные уравнения центрально-аффинной геометрии гиперповерхностей

$$\overset{1}{\nabla}_c l_b^\alpha = \partial_c l_b^\alpha - \overset{1}{G}{}_{cb}^l l_l^\alpha = -g_{cb} l^\alpha,$$

$$\nabla_c l_{b\alpha} = \partial_c l_{b\alpha} - \overset{2}{G}{}_{cb}^l l_{l\alpha} = -g_{cb} l_\alpha, \tag{2}$$

$$\partial_c = \frac{\partial}{\partial \eta^c}, \quad l_b^\alpha = \partial_b l^\alpha, \quad l_{b\alpha} = \partial_b l_\alpha$$

определяют две проективно евклидовы связности с коэффициентами $\overset{1}{G}{}_{cb}^l$ и $\overset{2}{G}{}_{cb}^l$, которые будут сопряжены относительно тензора g_{cb} (2)

$$\overset{1}{\nabla}_d g_{cb} = -\overset{2}{\nabla}_d g_{cb} = 2A_{dcb}, \tag{3}$$

где A_{dcb} — тензор. Тензор g_{cb} определяет ангулярную квадратичную дифференциальную форму в F_n. Мы будем пользоваться тензором g_{cb} для поднимания и опускания индексов.

Имеем

$$\overset{1}{G}{}_{cb}^a - \overset{2}{G}{}_{cb}^a = 2A_{cb}{}^{a}. \tag{4}$$

Рассмотрим гомологические преобразоваиия в касательных E_n, определяемые уравнениями соответственно в точечных и гиперплоскостных координатах

$$'x^\alpha = \frac{x^\alpha}{1 - \sigma_\beta x^\beta}, \quad 'y_\alpha = y_\alpha - \sigma_\alpha, \tag{5}$$

где $\sigma_\alpha = \partial_\alpha \sigma$ — градиент скалярной функции σ в F_n. Преобразование (5) преобразует каждую индикатрису в некоторую другую гиперповерхность.

Эти гиперповерхности, взятые в качестве индикатрис, определяют новую метрику Финслера. Может быть показано, что кривые экстремальной длины сохраняют это свойство при рассматриваемом гомологическом преобразовании метрики Финслера ([3], стр. 197).

Пусть g_{cb} определяет положительно дефинитную квадратичную форму, что означает выпуклость индикатрис. Мы предположим, что гиперплоскость σ_α, которая при преобразовании (5) преобразуется в бесконечно удаленную гиперплоскость, является касательной гиперповерхностью в индикатрисе. В этом случае скаляр $\sigma = \sigma(\xi^\omega)$ должен являться решением уравнения Пфаффа

$$d\sigma = l, \tag{6}$$

где $l = l_\alpha d\xi^\alpha$. Направление радиуса-вектора точки касания σ_α будет изотропным направлением преобразованной метрики Финслера. Таким образом мы получаем конгруэнцию изотропных кривых, которые, очевидно, будут экстремалями преобразованной, а следовательно, и исходной метрики.

Обозначая через $[dl]$ внешний дифференциал Картана от формы Пфаффа l, мы можем положить

$$[dl] = \Lambda^{cb}[l_c l_b] + \Lambda^b [l l_b] + [d\eta^b l_b], \tag{7}$$

где $l_b = \partial_b l$ и скобки обозначают внешнее умножение форм Пфаффа по Картану.

Соответственно равенству (7) характеристики уравнения Пфаффа (6) определяются уравнениями

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = l^\alpha(\xi^\omega, \eta^l), \quad \frac{d\eta^a}{ds} + \Lambda^a = 0. \tag{8}$$

В X_n эти уравнения определяют кривые, которые могут быть сделаны изотропными с помощью соответствующего гомологического преобразования метрики Финслера, и потому уравнения (8) будут являться дифференциальными уравнениями экстремалей. Все сказанное выше дает геометрическую интерпретацию хорошо известного метода Каратеодори в вариационном исчислении ([3]). Отсюда следует, что с точки зрения вариационного исчисления очень интересным является изучение свойств пространства Финслера, остающихся инвариантными при гомологических преобразованиях метрики.

Теория гиперповерхностей в центральном E_n, подвергаемых произвольным преобразованиям (5), эквивалентна теории гиперповерхностей в центрально проективном пространстве. Может быть показано, что коэффициенты аффинной связности

$$\begin{aligned} {}^*\overset{1}{G}{}^a_{cb} &= \overset{1}{G}{}^a_{cb} + \frac{4}{n+1}\delta_{(c}A_{b)}, \\ {}^*\overset{2}{G}{}^a_{cb} &= \overset{2}{G}{}^a_{cb} - \frac{2}{n+1}A^a g_{cb}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $A_b = A_{bc}^{\cdot\cdot c}$, будут инвариантны при преобразованиях (5), и, следовательно, аффинор

$$P_{cb}^{\cdot\cdot a} = \frac{1}{2}\left({}^*\overset{2}{G}{}^a_{cb} - {}^*\overset{1}{G}{}^a_{cb}\right) = A_{cb}^{\cdot\cdot a} - \frac{1}{n+1}\left(2\delta_{(c}A_{b)} + g_{cb}A^a\right) \tag{10}$$

будет также инвариантным. Обращение в нуль $P_{cb}^{\cdot\cdot a}$ характеризует гиперповерхности второго порядка. Исключая их из рассмотрения, мы можем предположить скаляр

$$I = P_{cb}^{\cdot\cdot a} P_{dc}^{\cdot\cdot b} g^{cd} \tag{11}$$

отличным от нуля в силу того, что g_{cb} определяет дефинитную квадратичную форму. С помощью этого скаляра мы определим инвариантный тензор:

$$a_{cb} = I g_{cb}. \tag{12}$$

Рассмотрим индикатрисы F_n как локальные $(n-1)$-мерные пространства X_{n-1} составного многообразия $X_{n+(n-1)}$ ([1]), базисным пространством которого является само F_n. Введем в $X_{n+(n-1)}$ линейную связность с помощью уравнения

$$\delta\eta^a = d\eta^a + \Gamma^a = 0, \tag{13}$$

где $\Gamma^a = \Gamma^a_{\alpha}(\xi^\omega, \eta^l)\, d\xi^\alpha$ — заданные формы Пфаффа, определяющие связность. Каждая линейная связность в $X_{n+(n-1)}$, определяя отображение индикатрис друг на друга, определяет параллельное перенесение векторов в F_n и обратно. Может быть показано, что связность в $X_{n+(n-1)}$, соответствующая параллельному перенесению векторов в F_n по Бервальду ([1]), определяется следующими двумя условиями:

$$\begin{gathered} [Dl] = [d\xi^\alpha \partial_\alpha l] - [\Gamma^a l_a] = 0, \\ D_0 g_{cb} = l^\alpha D_\alpha g_{cb} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Первое из этих условий состоит в том, что должен обращаться в нуль внешний ковариантный дифференциал от формы Пфаффа l. Геометрически это означает, что экстремали совпадают с геодезическими и первый аффинор кривизны гиперповерхностей симметричен. Второе условие выражает, что бесконечно малые углы между геодезическими и направлениями, параллельно переносимыми вдоль этих геодезических, будут постоянны. Из равенства (14) получаем явное выражение для Γ^a:

$$\Gamma^a = \left\{ \Lambda^{ba} + \frac{1}{2}\left(l^\alpha \partial_\alpha g^{ba} - \Lambda^c \partial_c g^{ba} + \partial_c \Lambda^a g^{cb} + \partial_c \Lambda^b g^{ca}\right) \right\} l_b + \Lambda^a l. \tag{15}$$

Необходимое и достаточное условие, чтобы F_n являлось пространством Минковского, заключается в том, что связность (15) должна быть нулевой кривизны и $\overset{2}{G}{}^a_{cb}$ или, что то же самое, $\overset{1}{G}{}^a_{cb}$ должны определять в $X_{n+(n-1)}$ постоянное поле. Так как первое из уравнений (14) инвариантно при гомологических преобразованиях (5), то мы получим линейную связность в $X_{n+(n-1)}$, инвариантную при этих преобразованиях, если мы заменим второе из уравнений (14) следующим инвариантным уравнением

$$D_0 a_{cb} = 0. \tag{16}$$

Обозначая через $^*\Gamma^a$ формы Пфаффа, определяющие эту связность, имеем

$$^*\Gamma^a = \Gamma^a - \frac{l^\alpha \partial_\alpha I - \Lambda^c \partial_c I}{2I} g^{ba} l_b. \tag{17}$$

Необходимое и достаточное условие, чтобы с помощью гомологического преобразования (5) F_n могло быть преобразовано в пространство Минковского, заключается в том, что связность (17) должна быть нулевой кривизны и a_{cb} и $*\overset{2}{G}{}^a_{cb}$ или, что то же самое, $*\overset{1}{G}{}^a_{cb}$ определяют постоянные поля в $X_{n+(n-1)}$.

Саратовский университет

Поступило
25 XII 1943

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Berwald, C. r. du 2-me Congrès des mathématiciens des pays slaves, Praha (1934). [2] A. Norden, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, вып. IV, 205 (1937). [3] K. Carathéodory, Variationsrechnung, 1935, S. 197. [4] В. Вагнер, ДАН, XL, № 3 (1943).