Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 8—9

ФИЗИКА

И. Е. ТАММ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ДВИЖЕНИЕ МЕЗОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 1. В настоящей статье мы покажем, что движение заряженных частиц со спином 1 в кулоновом поле (как и взаимодействие их со светом большой частоты) существенно зависит от радиуса этих частиц, что резко отличает их от частиц со спином 0 или $^1/_2$. Объясняется это тем, что частицы со спином 1 (в дальнейшем мы будем называть их мезонами) в отличие от электронов обладают истинным магнитным моментом (в смысле этого термина, уточненном в § 4).

Известно, что теория мезонов неоднократно приводила к физически неприемлемым результатам. Простейшим примером является рассеяние мезонов точечным зарядом: в борновском приближении рассеяние это не падает с увеличением энергии мезонов, а стремится к конечному пределу (1). Все же можно было надеяться, что точное решение задачи приведет к разумному результату. Однако это не так.

§ 2. Уравнения Прока для мезонов в электромагнитном поле, описываемом потенциалами φ и $\boldsymbol{A}$, можно привести в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} h\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}+ie\varphi\boldsymbol{F}&=\mu c^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{\mu}[\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}]],\\ h\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+ie\varphi\boldsymbol{B}&=-\mu c^2\boldsymbol{F}-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{P}=-ih\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, а μ есть масса мезона.

Векторы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{B}$ мезонного поля соответствуют электрической напряженности $\mathcal{E}$ и векторному потенциалу $\boldsymbol{A}$ электромагнитного поля. Величины, соответствующие магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ и скалярному потенциалу φ, исключены из уравнений мезонного поля (1): они выражаются алгебраически через $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B}$ и их пространственные производные. Поэтому уравнения (1), хотя они и содержат пространственные производные 2-го порядка, соответствуют дираковским уравнениям 1-го порядка.

Положим

$$\Psi_{1k}=F_k, \qquad \Psi_{2k}=iB_k, \qquad k=1,2,3 \tag{2}$$

и введем два ряда матриц: три паулиевские матрицы τ_1, τ_2, τ_3, действующие на первый индекс мезонной волновой функции $\Psi_{\alpha k}$, и три матрицы s_k, действующие на второй ее индекс:

$$s_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{vmatrix}, \quad s_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{vmatrix}, \quad s_3=\begin{vmatrix} 0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}. \tag{3}$$

Матрицы s_k удовлетворяют трем соотношениям типа $s_1s_2 - s_2s_1 = is_3$ и их собственные значения равны ± 1 и 0. Они соответствуют спину мезона. В частности, оператор момента количества движения мезона равен

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rP}] + hs. \tag{4}$$

С помощью обозначений (2) и (3) уравнения (1) принимают вид

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = K\Psi,$$

$$\boldsymbol{K} = e\varphi + \tau_1\left\{\mu c^2 + \frac{P^2}{2\mu} - \frac{eh}{2\mu c}(\boldsymbol{sH})\right\} - i\tau_2\left\{\frac{P^2}{2\mu} - \frac{eh}{2\mu c}(\boldsymbol{sH}) - \frac{(\boldsymbol{sP})^2}{\mu}\right\}. \tag{5}$$

Оператор K не эрмитов, но τ_1K эрмитов и энергия мезонного поля, определенная с помощью релятивистского тензора энергии и импульса, равна

$$E = \int \Psi^*\tau_1 K\Psi\, dV. \tag{6}$$

При этом следует иметь в виду, что плотность зарядов мезонов равна

$$\rho = ie(\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{B} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{B}^*) = e\Psi^*\tau_1\Psi. \tag{7}$$

Стационарные решения уравнений (1) или (5) имеют вид

$$\Psi_{ak} = \psi_{ak}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\omega t}, \text{ т. е. } \boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\omega t} \text{ и } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\omega t}, \tag{8}$$

причем

$$h\omega\cdot\psi = K\psi. \tag{9}$$

Можно показать, что энергия мезона в состоянии (8) равна

$$E = h\omega\cdot\frac{1}{e}\int\rho\, dV. \tag{10}$$

Так как E действительно, то ω может быть комплексным только в том случае, если равны нулю как энергия E, так и полный заряд $\int\rho\, dV$ мезонного поля. Волновые функции комплексной частоты описывают рождение и аннигиляцию мезонных пар. Если же полный заряд отличен от нуля, то волновую функцию можно нормировать

$$\int\rho\, dV = \pm e; \tag{11}$$

частота ее действительна и $h\omega = \pm E$. (12)

§ 3. Рассмотрим стационарные состояния мезона в центральном поле ($\varphi = \varphi(r)$, $A = 0$). Решение уравнений

$$M_Z\psi = mh\psi, \quad M^2\psi = j(j+1)\,h^2\psi, \tag{13}$$

определяющих значение механического момента мезона j и его проекции m на ось Z, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_x + if_y &= Y_{j+1}^{m+1} f_+ + Y_j^{m+1} f_0 + Y_{j-1}^{m+1} f_-\,, \\ f_x - if_y &= -(j-m+1)(j-m+2)\, Y_{j+1}^{m-1} f_+ + \\ &\quad + (j-m+1)(j+m)\, Y_j^{m-1} f_0 - (j+m-1)(j+m)\, Y_{j-1}^{m-1} f_-\,, \\ f_z &= (j-m+1)\, Y_{j+1}^m f_+ - mY_j^m f_0 - (j+m)\, Y_{j-1}^m f_-\,; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

аналогично выражаются и компоненты вектора $\boldsymbol{b}$. Здесь $Y_j^m = e^{im\varphi}P_j^m(\theta)$, а $f_\pm$, f_0, $b_\pm$, b_0 суть 6 функций радиуса-вектора r.

Если внести (14) в уравнения (1) или (5), то они распадаются на две независимые группы. Первая имеет вид

$$b_0'' + \frac{2}{r}b_0' - \frac{j(j+1)}{r^2}b_0 + \frac{1}{h^2c^2}\{(h\omega - e\varphi)^2 - \mu^2c^4\}\, b_0 = 0, \quad \mu c^2 f_0 = i(e\varphi - h\omega)\, b_0. \tag{15}$$

Уравнение для $b_0(r)$ совпадает с обычным уравнением для бесспиновой частицы. Вторая независимая система уравнений с помощью обозначений

$$\left.\begin{aligned}
&jf_- - (j+1)\,f_+ = \frac{\sqrt{j\,(j+1)}}{r}\,\Phi_1, \quad f_- + f_+ = -\frac{\Phi_2}{r\sqrt{j\,(j+1)}},\\
&jb_- - (j+1)\,b_+ = \frac{i\beta_1}{r}, \quad b_- + b_+ = -\frac{i\beta_2}{r},\\
&\lambda = \frac{(e\varphi - h\omega)}{\sqrt{j\,(j+1)}}\left(\frac{\mu}{h^2}\right), \quad K_0 = \frac{\mu c}{h}
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

может быть записана так:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1'' + \frac{\Phi_2'}{r} - \frac{2\,(\Phi_1+\Phi_2)}{r^2} - K_0^2\,\Phi_1 + \lambda\beta_1 = 0, \quad \frac{\beta_2''}{r} + \frac{\beta_1'}{r} - \frac{\beta_1}{r^2} - K_0^2\,\beta_2 + \lambda\Phi_2 = 0,\\
&\frac{\Phi_1'}{r} + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{r^2} + \frac{K_0^2}{\sqrt{j\,(j+1)}}\,\Phi_2 - \lambda\beta_2 = 0, \quad \frac{\beta_2'}{r} + \frac{\beta_1}{r^2} + \frac{K_0^2}{\sqrt{j\,(j+1)}}\,\beta_1 - \lambda\Phi_1 = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Рассмотрим для определенности несвязанные состояния мезона ($|h\omega| > \mu c^2$). Если потенциальная энергия мезона $e\varphi\,(r)$ не имеет полюсов, то при фиксированных значениях ω, j и m, удовлетворяющих условиям $|h\omega| > \mu c^2$, $|m| \leqslant j$, $j \geqslant 1$ *, уравнения (1) или (5) имеют 3 независимых решения. Одно из этих решений удовлетворяет уравнениям (15) и два — уравнениям (17). Они соответствуют трем возможным ориентациям спина мезона $\boldsymbol{s}$ относительно его орбитального момента $\boldsymbol{l}$ **.

Однако в поле точечного заряда $\varphi = \frac{e'}{r}$ попрежнему (при $j \geqslant 1$) есть одно конечное решение уравнений (15), решения же уравнений (17) при $r \to 0$ имеют вид [сравни уравнение (24)]:

$$f_\pm \sim b_\pm \sim r^{-\frac{7}{4}} \exp\left\{2\eta\sqrt{\frac{ee'}{\mu c^2 r}}\,[j\,(j+1)]^{\frac{1}{4}}\right\},\qquad(18)$$

где $\eta = \sqrt[4]{1}$, т. е. $\eta = \pm 1$ или $\eta = \pm i$. Не два, а только одно из этих решений ($\eta = -1$) остается конечным при $r = 0$. Решение, соответствующее $\eta = +1$, растет экспоненциально при $r \to 0$, тогда как решения $\eta = \pm i$ соответствуют постоянному потоку мезонов, направленному к точечному заряду или от него. Выражение энергии (6) в случаях $\eta = +1$ и $\eta = \pm i$ оказывается бесконечным.

Таким образом допустимые решения уравнений Прока в поле точечного заряда не образуют полной системы функций и, например, задача о рассеянии мезонов кулоновым полем не имеет решений.

Причина этой несостоятельности теории лежит, по всей вероятности, в том, что ею не учитываются конечные размеры мезона: обычные уравнения движения должны перестать быть применимыми при $r \sim r_0 = \frac{e^2}{\mu c^2}$.

Во всяком случае сделанные различными авторами оценки кулонового рассеяния мезонов, их тормозного излучения и т. д. требуют пересмотра и не могут быть правильными при $E \geqslant 137\ \mu c^2$.

§ 4. Физическую причину своеобразного поведения мезонов легче всего выяснить на простейшем примере движения мезонов в поле, зависящем только от одной координаты x [$\varphi = \varphi\,(x)$]. Направим ось y перпендикулярно плоскости движения мезона. Тогда

$$\Psi = u\,(x)\,e^{i\,(kz - \omega t)}\qquad(19)$$

и уравнения (1) могут быть сведены к 3 независимым уравнениям типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left\{\frac{(h\omega - e\varphi)^2}{h^2c^2} - \frac{\mu^2c^2}{h^2} - k^2 + \frac{2\mu}{h^2}\,V\,(x)\right\}u = 0,\qquad(20)$$

---

* При $j = 0$ есть лишь одно решение для каждого ω.

** Однако лишь $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$, а не $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{s}$ порознь являются интегралами движения, так что в решениях типа (17) параллельная и антипараллельная ориентация s относительно l смешаны между собой.

где
$$V(x)=\xi\frac{eh^2kE}{2\mu^2c^2}. \tag{21}$$

Здесь $E=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\xi=\pm 1,0$ в зависимости от значения проекции спина мезона на ось y. Уравнение (20) отличается от релятивистского Шредингеровского уравнения только членом $\frac{2\mu}{h^2}V$, причем $V(x)$ точно равно классической энергии магнитного диполя момента $m_0=\frac{eh}{2\mu c}$, движущегося в поле E со скоростью v, определяемой из соотношения $P=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Действительно, так как E направлено по x и $v_y=0$, то энергия эта равна
$$\pm m_0\cdot\frac{v_z E}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\pm\frac{eh}{2\mu c}\cdot\frac{kh}{\mu c}\cdot E.$$

Дираковское уравнение для движения частицы со спином $^1/_2$ в поле $\varphi=\varphi(x)$ тоже может быть приведено в форму (20); однако в этом случае $V(x)$ имеет следующее значение
$$V(x)=\pm\frac{eh^2E}{2\mu(\mu c^2+h\omega-e\varphi)}\left(k-\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{21'}$$

Это выражение сводится к классической энергии магнитного диполя только при условии $|h\omega-e\varphi|\ll\mu c^2$ и $\left|\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right|\ll k$.

Таким образом электрон может быть уподоблен заряженному магнитному диполю только в нерелятивистском паулиевском приближении, тогда как мезон обладает «истинным» магнитным моментом при как угодно больших энергиях. Этим объясняется также и подчеркивавшееся многими авторами аномально сильное взаимодействие мезонов со светом большой частоты: энергия взаимодействия диполя со светом пропорциональна $\mathcal{E}$ и $\boldsymbol{H}$, а не $\boldsymbol{A}$, т. е. пропорциональна более высокой степени частоты света.

В соответствии с изложенным можно ожидать, что в уравнении движения мезона в кулоновом поле $\mathcal{E}=\frac{e'\boldsymbol{r}}{r^3}$ будет входить член вида
$$\frac{2\mu}{h^2}V(r)\sim\frac{2\mu}{h^2}\cdot\frac{m_0\boldsymbol{s}[\boldsymbol{pE}]}{\mu c}=\frac{2m_0e'}{h^2c}\,\frac{\boldsymbol{s}[\boldsymbol{pr}]}{r^3}=-\frac{ee'}{\mu c^2}\,\frac{(\boldsymbol{sl})}{r^3}, \tag{22}$$
где $h\boldsymbol{l}=[\boldsymbol{rp}]$. И, действительно, из (17) можно получить два довольно сложных уравнения для функций
$$u_1=\Phi_1+\beta_2 \quad \text{и} \quad u_2=\Phi_1-\beta_2; \tag{23}$$
главные члены этих уравнений при $r\to 0$ имеют вид:
$$u''+\frac{2}{r}u'-\frac{j(j+1)}{r^2}u\pm\frac{ee'}{\mu c^2}\,\frac{\sqrt{j(j+1)}}{r^3}u=0. \tag{24}$$

Последнее уравнение совпадает по форме с уравнением Шредингера (при $r\to 0$) в силовом поле $V(r)$, подобном (22). Уравнения (24) обладают существенно особой точкой при $r=0$; их решения отличаются от (18) множителем $r^{3/2}$ (ибо, например, $f_\pm\sim u'\sim r^{-3/2}u$). Дипольный член в уравнении (24) начинает превалировать при $r\sim r_0=\frac{e^2}{\mu c^2}$.

Подробная статья появится в «Journal of Physics».

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
19 X 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Massey a. Corben, Proc. Cambr. Phil. Soc., 35, 463 (1939); Oppenheimer, Snyder a. Serber, Phys. Rev., 57, 76 (1940).