Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 8—9

МАТЕМАТИКА

Д. И. ФУКС-РАБИНОВИЧ

ПРИМЕР ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРОИЗВОДЯЩИХ И СООТНОШЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 18 IX 1940)

В своей статье (1) ранее я указал пример группы, непредставимой изоморфно матрицами с элементами из любого коммутативного поля. Приведенное там доказательство относилось к полям с характеристикой, неравной 2. Вследствие случайных обстоятельств эта оговорка при напечатании статьи выпала. В настоящей статье мы покажем, что приведенная в цитированной работе группа не только не может быть изоморфно представлена матрицами конечного порядка, но и не имеет полной системы линейных представлений в смысле следующего определения.

Система $\mathfrak{M}$ линейных представлений G' группы G называется полной, если для каждого отличного от единицы элемента $a \in G$ найдется такое представление $G' \in \mathfrak{M}$, что матрица A, соответствующая a при гомоморфизме $G \sim G'$, неравна единичной матрице.

Рассмотрим группу G, определенную производящими x, y, a, b и соотношениями

$$y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad ax = xya, \; bx = x^2 b. \tag{1}$$

В указанной статье была доказана относительно группы G следующая теорема: *если G'—линейное представление группы G в коммутативном поле с характеристикой, неравной 2, то матрица Y, соответствующая y в этом представлении, равна единичной, в то время как в самой группе G $y \neq 1$.*

Мы докажем, что эта теорема справедлива и в поле с характеристикой 2.

Для доказательства отметим предварительно следующие леммы.

I. *Если неособенная матрица X конечного порядка n сопряжена со своим квадратом, то каждое характеристическое число x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы X есть корень нечетной степени m_i из единицы.*

Доказательство содержится в рассуждениях цитируемой статьи.

II. *Для любой матрицы C конечного порядка с элементами из коммутативного поля с характеристикой 2 найдется такое целое число $\alpha > 0$, что C^{2^α} приводится преобразованием к диагональной форме.*

Достаточно доказать это для матрицы вида

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

где вдоль главной диагонали стоит одно и то же число λ, над главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, так как матрицу C можно привести к жордановой нормальной форме. Если принять во внимание, что в поле с характеристикой 2 $\lambda+\lambda=0$, то легко убедиться, что при последовательном возведении матрицы D в квадрат диагональ с единицей будет удаляться от главной диагонали. Поэтому для некоторого α матрица D^{2^α}—скалярная.

III. *Матрица X с элементами из поля с характеристикой 2, сопряженная со своим квадратом, приводится преобразованием к диагональному виду. Так как из $BXB^{-1}=X^2$ вытекает $B^\alpha XB^{-\alpha}=X^{2^\alpha}$, то эта лемма является следствием из* II.

Допустим теперь, что существуют матрицы X, Y, A, B с элементами из коммутативного поля с характеристикой 2, удовлетворяющие соотношениям (1). Докажем, что $Y=1$. По III существует такая матрица S, что $X'=S^{-1}XS$ имеет диагональный вид.

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 & & & 0 \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_n \end{pmatrix}$$

Согласно I $x_i^{m_i}=1$, $m_i \not\equiv 0$ (2). Полагая $\sigma=m_1m_2\ldots m_n$, имеем, очевидно, $X'^\sigma=1$. Но тогда и $X^\sigma=1$. Так как XY сопряжено с X, то и $(XY)^\sigma=1$ и, в силу $XY=YX$, $X^\sigma Y^\sigma=Y^\sigma=1$. Вместе с $Y^2=1$ и $\sigma\not\equiv 0$ (2) это дает $Y=1$. Теорема доказана.

Следствие. Группа G непредставима изоморфно и, более того, не имеет полной системы представлений.

Доказательство. Элемент y, неравный единице в G, отображается в единичную матрицу при любом представлении.

Замечание. Мы могли бы построить группу, не имеющую полной системы линейных представлений, не прибегая к исследованию представления группы G в поле с характеристикой 2. Для этого достаточно рассмотреть группу F, заданную производящими u, v, c, d и соотношениями

$$v^3=1, \quad uv=vu, \quad cu=uvc, \quad du=u^3d.$$

Тем же способом, как и в цитированной статье, можно показать, что элемент v, неравный единице в группе F, отображается в единичную матрицу при любом линейном представлении F в коммутативном поле с характеристикой, неравной 3. Отсюда вытекало бы, что свободное произведение H групп F и G не имеет полной системы линейных представлений, так как элемент $yvy^{-1}v^{-1}$, неравный единице в H, отображается в единичную матрицу при любом представлении.

Поступило
21 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ДАН, XXVII, № 5 (1940).