Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 8—9

МАТЕМАТИКА

А. А. БУХШТАБ

О РАЗЛОЖЕНИИ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ НА СУММУ ДВУХ СЛАГАЕМЫХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРОСТЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 VI 1940)

В одной из своих работ Тартаковский ([1]) высказал утверждение о возможности получения методом Эратосфенова решета теоремы о разложимости четных чисел на сумму двух слагаемых, каждое из которых состоит не больше чем из четырех простых множителей. В виду того что соответствующее доказательство не было дано автором и должно представить большие трудности при тех средствах, которые употребляет в этих работах их автор, я хочу отметить тот факт, что этот результат может быть, в частности, получен путем соответствующих уточнений в вычислениях методом, разработанным мною ранее ([2]).

Я получаю следующие результаты: 1) Существует постоянная A_0 такая, что все числа, бóльшие чем A_0, разлагаются на сумму двух слагаемых, каждое из которых состоит не больше чем из четырех простых множителей. 2) Среди чисел, состоящих не больше чем из четырех простых множителей, существует бесконечное число пар чисел с разностью, равной двум. 3) Если обозначить через $z(x)$ число простых чисел p в интервале от 2 до x таких, что $p+2$ также простое, то для $x > x_0$ $z(x) < 19{,}43 \frac{x}{(\log x)^2}$.

Обозначения в дальнейшем в основном те же, что и в моей цитированной выше работе; $\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{\alpha}})$ обозначает число неотрицательных чисел, меньших или равных x, не встречающихся в прогрессиях: a_0+kp_0; a_i+kp_i; b_i+kp_i, где $p_0=2$; $3 \leqslant p_i < x^{\frac{1}{\alpha}}$; $0 \leqslant a_i < p_i$; $0 \leqslant b_i < p_i$ и $a_i \neq b_i$, понимая под ω область взятых значений a_i и b_i.

Лемма 1. *$\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{15}}) > 224{,}9997 \frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right)$ независимо от выбора области ω, где c — постоянная, равная $0{,}4161\ldots$*

В неравенстве $\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{15}}) > \frac{x}{2}E - R$, где

$$E = \Big(1 - \sum_{a\leqslant r}\frac{2}{p_a}\Big) + \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r_1}\frac{2^2}{p_a p_b}\Big(1 - \sum_{c<b}\frac{2}{p_c}\Big) +$$
$$+ \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r_1}\sum_{c\leqslant r_1}\sum_{d\leqslant r_2}\frac{2^4}{p_a p_b p_c p_d}\Big(1 - \sum_{e<d}\frac{2}{p_e}\Big) + \ldots,$$
$$p_r < x^{\frac{1}{15}} \leqslant p_{r+1}; \quad r \geqslant r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots,$$

выбираем

$$p_{r_3}=p_{r_2}=p_{r_1}=p_r;$$

p_{r_k} при $4\leqslant k\leqslant t+1$ выбираем равным наибольшему простому, меньшему чем $x^{\frac{1}{15h^{k-3}}}$, где $h=\frac{5}{4}+\varepsilon$; $\varepsilon>0$ — достаточно малое число; t — целое число такое, что $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}}<w_0\leqslant p_{r_{t+1}}$; w_0 выбираем так, что при

$$w\geqslant w_0,\quad \sum_{w\leqslant p<w^h}\frac{2}{p}<2\log(h+\varepsilon)<0{,}4463=\tau$$

и

$$\prod_{w\leqslant p<w^h}\frac{1}{1-\frac{2}{p}}<(h+\varepsilon)^2<1{,}563=\lambda.$$

При $t+1<k\leqslant n$ берем $p_{r_k}=p_{r_{t+1}}$. Граница n значений k, очевидно, конечная при данном w_0.

Обозначим через E_k, где $k=1, 2, \ldots, n-3$ $(E_{n-2}=E)$, сумму тех членов в E, которые образованы из простых чисел с индексами, бо́льшими чем r_{k+3}; эти члены при $k\leqslant t-2$ могут иметь не больше чем $2k+5$ простых множителей в знаменателе, т. е.

$$E_k=1-E_k^{(1)}+\ldots+E_k^{(2k+4)}-E_k^{(2k+5)}.$$

Из соотношений $E_k^{(i)}=S_k^{(i)}+S_k^{(i-1)}E_{k-1}^{(1)}+\ldots+S_k^{(1)}E_{k-1}^{(i-1)}+E_{k-1}^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, 2k+5)$; $E_{k-1}^{(2k+4)}=E_{k-1}^{(2k+5)}=0$; $E_1^{(i)}=S_1^{(i)}$; $S_k^{(i)}<\frac{\tau^i}{i!}$ при $k\leqslant t-2$ получаем, что

$$E_k^{(i)}<\frac{(k\tau)^i}{i!}$$

при $1\leqslant i\leqslant 2k+5$; $k\leqslant t-2$.

Мы получаем затем, что

$$E_1>\pi_1-\frac{S_1^{(8)}}{8!};\quad E_{k+1}>E_k\pi_{k+1}-\Phi_{k+1}$$

при $1\leqslant k<t-2$, где

$$\pi_k=\prod_{p_{r_{k+3}}<p\leqslant p_{r_{k+2}}}\left(1-\frac{2}{p}\right);\quad \Phi_{k+1}=S_{k+1}^{(2k+8)}+S_{k+1}^{(2k+7)}E_k^{(1)}+\ldots+S_{k+1}^{(3)}E_k^{(2k+5)}.$$

При $t-2\leqslant k\leqslant n-4$ мы имеем $E_{k+1}=E_k$, так как тогда $p_{r_{k+4}}=p_{r_{k+3}}$ и, наконец, $E=E_{n-2}=E_{n-3}\pi_{n-2}$, где $\pi_{n-2}=\prod\limits_{3\leqslant p\leqslant p_{r_{t+1}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)$.

Пользуясь оценками $S_{k+1}^{(i)}$ и $E_k^{(i)}$, получаем, что

$$\Phi_{k+1}<\sum_{i=0}^{2k+8}\frac{\tau^{2k+8-i}}{(2k+8-i)!}\,\frac{(k\tau)^i}{i!}=\frac{\{(k+1)\tau\}^{2k+8}}{(2k+8)!}$$

при $1\leqslant k<t-2$.

Последовательное применение неравенств для E_k дает

$$E=E_{n-2}>\pi_1\pi_2\ldots\pi_{n-2}\left(1-\frac{S_1^{(8)}}{\pi_1}-\frac{\Phi_2}{\pi_1\pi_2}-\frac{\Phi_3}{\pi_1\pi_2\pi_3}-\ldots\right)>$$

$$>\prod_{3\leqslant p<x^{\frac{1}{15}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}\{(k+1)\tau\}^{2k+8}}{(2k+8)!}\right).$$

Легко видеть, что отношение k-го члена последней суммы к предыдущему меньше, чем

$$\frac{\tau^2 e^2\lambda}{4} f(k), \quad \text{где } f(k) = \frac{(k+1)^8}{(k+3{,}5)(k+4)k^6},$$

и, так как при $k \geqslant 7$ $f(k)$ — убывающая функция, это отношение $< \frac{\tau^2 e^2 \lambda}{4} f(7) < 0{,}71002$. Вычисляя первые 6 членов суммы непосредственно, а остальную часть заменяя мажорантой в виде прогрессии с знаменателем $0{,}71002$, легко вычислить, что эта сумма меньше, чем $0{,}00000132$; так как притом

$$\prod_{3 \leqslant p < x^{\frac{1}{15}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \frac{225 e^A}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right),$$

где

$$A = \lim_{x \to \infty} \left\{ 2 \log \log x + \sum_{3 \leqslant p \leqslant x} \log\left(1 - \frac{2}{p}\right) \right\},$$

то

$$E > 224{,}9997 \frac{2c}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right), \quad \text{где } c = \frac{1}{2} e^A = 0{,}4161\ldots [3]$$

Величина R меньше, чем

$$c_1 p_r p_{r_1}^2 p_{r_2}^2 p_{r_3}^2 \ldots \leqslant c_1 x^{\frac{7}{15}} \prod_{h=1}^{\infty} x^{\frac{2}{15 h^k}} < c_1 x^{1 - \frac{32}{15(1+4\varepsilon)}} = 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right),$$

где c_1 — постоянная, поскольку w_0 уже выбрано:

Получаем окончательно:

$$\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{15}}) > 224{,}9997 \frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right).$$

Лемма 2. $\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{14}}) < 196{,}0022 \frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right).$

$$\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{12}}) < 144{,}1328 \frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right)$$

независимо от области ω, *где* c *то же, что и в лемме* 1.

В неравенстве

$$\underset{\omega}{P}(x; x^{\frac{1}{\alpha}}) < \frac{x}{2} E + R + 1,$$

где

$$E = 1 - \sum_{a \leqslant r_1} \frac{2}{p_a}\left(1 - \sum_{b<a} \frac{2}{p_b}\right) - \sum_{a \leqslant r_1} \sum_{b \leqslant r_1} \sum_{c \leqslant r_2} \frac{2^3}{p_a p_b p_c}\left(1 - \sum_{d<c} \frac{2}{p_d}\right) \ldots,$$

выбираем при $\alpha = 14$ $p_{r_1} = p_{r_2} = p_{r_3}$ равным наибольшему простому, меньшему, чем $x^{\frac{1}{14}}$ при $4 \leqslant k \leqslant t+1$, p_{r_k} равным наибольшему простому, меньшему, чем $x^{\frac{1}{14 h^{k-3}}}$, где $h = \frac{5}{4} + \varepsilon$. При $\alpha = 12$ выбираем $p_{r_1} = p_{r_2}$ равным наибольшему простому, меньшему, чем $x^{\frac{1}{12}}$, при $3 \leqslant k \leqslant t+1$ p_{r_k} равным наибольшему простому, меньшему, чем $x^{\frac{1}{12 h^{k-2}}}$ с тем же h. При $k > t+1$ берем $p_{r_k} = p_{r_{t+1}}$ $(p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}} < w_0 \leqslant p_{r_{t+1}})$. Оценки, проведенные теми же приемами, как в лемме 1, дают нам оценки леммы 2.

Теорема. *Если $\lambda_i(\alpha)$ и $\Delta_k(\alpha)$ — некоторые функции с конечным числом разрывов 1-го рода, такие, что независимо от выбора области* ω

$$\underset{\omega}{P}\left(x;\ x^{\frac{1}{\alpha}}\right) > \lambda_i(\alpha)\frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right) \text{ при } 2 \leqslant \alpha \leqslant B_1,$$

$$\underset{\omega}{P}\left(x;\ x^{\frac{1}{\alpha}}\right) < \Delta_k(\alpha)\frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right) \text{ при } 2 \leqslant \alpha \leqslant B_2,$$

где $B_1 \geqslant 3$, $B_2 \geqslant 3$ — некоторые постоянные числа такие, что $|B_1 - B_2| \leqslant 1$, то

$$\psi(\alpha) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{при } 2 \leqslant \alpha \leqslant \tau \\ \lambda_i(\beta) - 2\int\limits_{\alpha-1}^{\beta-1} \Delta_k(z)\frac{z+1}{z^2}\,dz & \text{при } 3 \leqslant \tau \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant B_1 \end{array}\right\}, \quad (1)$$

$$\omega(\alpha) = \Delta_k(\beta) - 2\int\limits_{\alpha-1}^{\beta-1} \lambda_i(z)\frac{z+1}{z^2}\,dz \text{ при } 3 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant B_2 \quad (2)$$

являются также λ и Δ функциями, т. е. можно принять

$$\psi(\alpha) = \lambda_{i+1}(\alpha) \text{ и } \omega(\alpha) = \Delta_{k+1}(\alpha) \qquad (\Delta_{k+1}(\alpha) = \Delta_{k+1}(3) \text{ при } \alpha < 3).$$

Доказательство этой теоремы, приведенное в моей цитированной выше работе с $B_1 = B_2 = 10$, остается справедливым при любых B_1 и B_2. В дальнейшем берем $B_1 = 15$, $B_2 = 14$. Имея в виду очевидное соотношение

$$0 \leqslant \underset{\omega}{P}\left(x;\ x^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leqslant \underset{\omega}{P}\left(x;\ x^{\frac{1}{\beta}}\right) \text{ при } \alpha \leqslant \beta,$$

мы можем на основании лемм 1 и 2 и результатов, полученных в цитированной выше работе на стр. 385, принять в качестве начальных функций λ_0 и Δ_0 функции, определенные соотношениями:

$$\lambda_0(\alpha) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{при} & \alpha < 6 \\ 0{,}03 & » & 6 \leqslant \alpha < 8 \\ 53{,}51 & » & 8 \leqslant \alpha < 9 \\ 75{,}58 & » & 9 \leqslant \alpha < 10 \\ 98 & » & 10 \leqslant \alpha < 15 \\ 224{,}9997 & » & \alpha = 15 \end{array}\right. \quad \Delta_0(\alpha) = \left\{\begin{array}{lll} 67{,}58 & \text{при} & \alpha \leqslant 7 \\ 72{,}86 & » & 7 < \alpha \leqslant 8 \\ 85{,}1 & » & 8 < \alpha \leqslant 9 \\ 101{,}6 & » & 9 < \alpha \leqslant 10 \\ 144{,}1328 & » & 10 < \alpha \leqslant 12 \\ 196{,}0022 & » & 12 < \alpha \leqslant 14 \end{array}\right.$$

Пользуясь формулами (1) и (2), строим последовательность функций: $\Delta_1(\alpha)$; $\lambda_1(\alpha)$; $\Delta_2(\alpha)$ ... Обозначая

$$\Delta_k(\alpha) = \alpha^2 + R_k(\alpha),$$
$$\lambda_i(\alpha) = \alpha^2 - r_i(\alpha)$$

и подставляя в (1) и (2), получаем, что

$$r_{i+1}(\alpha) = \left\{\begin{array}{ll} \alpha^2 & \text{при } 2 \leqslant \alpha \leqslant \tau \\ r_i(\beta) + 2\int\limits_{\alpha-1}^{\beta-1} R_k(z)\frac{z+1}{z^2}\,dz & \text{при } 3 \leqslant \tau \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant B_1, \end{array}\right.$$

$$R_{k+1}(\alpha) = R_k(\beta) + 2\int\limits_{\alpha-1}^{\beta-1} r_i(z)\frac{z+1}{z^2}\,dz \text{ при } 3 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant B_2,$$

откуда, принимая во внимание, что $R_0(\alpha) > 0$ и $r_0(\alpha) > 0$, мы видим, что вообще $R_k(\alpha) > 0$ и $r_i(\alpha) > 0$, но тогда соотношение (3) дает, что $R_{k+1}(\alpha)$, а, следовательно, и $\frac{\Delta_{k+1}(\alpha)}{\alpha^2} = 1 + \frac{R_{k+1}(\alpha)}{\alpha^2}$ при $k \geqslant 0$ — убывающая функция от α. Точно так же получаем, что $\frac{\lambda_{i+1}(\alpha)}{\alpha^2}$ — возрастающая функция от α при $\alpha \geqslant \tau$.

Иттерационный процесс был проведен, заменяя $\int\limits_{\alpha-1}^{\beta-1} \lambda(z) \frac{z+1}{z^2} dz$ меньшей суммой

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{\lambda(u_s)}{u_s^2} \int\limits_{u_s}^{u_{s+1}} (z+1)\, dz,$$

а $\int\limits_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda(z) \frac{z+1}{z^2} dz$—одной из двух больших сумм

$$\sum_{s=0}^{n-1} \Lambda(u_{s+1}) \int\limits_{u_s}^{u_{s+1}} \frac{z+1}{z^2} dz$$

или
$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Lambda(u_s)}{u_s^2} \int\limits_{u_s}^{u_{s+1}} (z+1)\, dz \quad (u_0 = \alpha - 1; \quad u_n = \beta - 1),$$

причем последней суммой пользовались при значениях $\alpha > 7{,}4$. Вычисления велись на счетно-аналитических машинах системы Holerith с шагом $u_{s+1} - u_s = 0{,}02$. Разработка соответствующих схем вычислений на этих машинах, а также сами вычисления были проведены К. А. Семендяевым.

Последовательная иттерация привела при этом к следующей таблице значений функций λ и Λ в целых точках

α	5	6	....	10	....	13	14
$\lambda(\alpha)$	0,96438	26,46122	....	99,98181	....	168,99832	195,99920
$\Lambda(\alpha)$	46,67347	46,67347	....	100,02073	....	169,00271	196,00212

Откуда, в частности,

$$0{,}96 \frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right) \leqslant \underset{\omega}{P}\,(x; x^{\frac{1}{5}}) \leqslant 46{,}68 \frac{cx}{(\log x)^2} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right).$$

Оценка снизу будет справедливой и тогда, когда некоторые $a_i = b_i$, так как условие $a_i \neq b_i$, очевидно, только снижает нижнюю оценку.

Беря $a_i = 0$; $b_i = p_i - 2$, получаем теорему о бесконечности числа пар n; $n+2$, обе компоненты которых состоят не больше чем из четырех простых множителей, а также вышеуказанную верхнюю оценку числа «близнецов».

Беря $a_i = 0$ и b_i равными наименьшим неотрицательным вычетам числа $x = 2N$ по модулям p_i (тут $a_i = b_i$ при p_i/N), получаем теорему о разложимости четных чисел, начиная с некоторой границы, на сумму двух слагаемых, каждое из которых состоит не больше чем из четырех простых множителей.

Математический институт
Академии Наук СССР

Поступило
19 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Тартаковский, ДАН, XXIII, № 2 (1939). [2] А. Бухштаб, Матем. сб., нов. сер., 4, вып. 2 (1938). [3] V. Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Kristiania (1920).