Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 8—9

МАТЕМАТИКА

Н. В. АДАМОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, НЕ МЕНЯЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНУЮ КРИВУЮ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 X 1940)

1. В опубликованной ранее заметке (1) даны некоторые результаты применения к решению и исследованию уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

заданного в области G ($a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant x \leqslant \partial$), с правой частью, непрерывной по обеим переменным и допускающей ограниченную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ оператора:

$$A[y] = y(x) + \int_a^x Y(x, y)\, dx - X(x, y)\, dy,$$

$$0 < X(x, y) \leqslant 1; \quad Y(x, y) = X(x, y) f(x, y); \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} > 0.$$

Напомним некоторые из этих результатов: 1) Функция $X(x, y)$ может быть найдена в форме

$$X(x, y) = he^{k(x-a)}; \quad k > \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

2) Оператор $A[y]$ преобразует поле кривых в области G в новое поле. 3) Пусть $y = y_1(x)$ есть некоторая кривая в области G и $y = y(x)$—интегральная кривая, проходящая через точку $O(a, y_1(a))$. Если справедливо неравенство

$$\int_a^x [X(x, y_1(x)) - Y(x, y_1(x))\, y_1'(x)]\, dx > 0, \ (x > a) \tag{2}$$

и если интегральная кривая $y = y(x)$ для $x > a$ принадлежит области G, то эта кривая для тех же значений x расположена над кривой $y = y_1(x)$.

В настоящем мы ставим себе задачу найти необходимое условие для того, чтобы заданная кривая проходила в области G под интегральной кривой, совпадающей с первой в начальной точке, а также найти достаточное условие для этого же, более слабое, чем неравенство (2); при изложении мы не пользуемся повторным применением оператора $A[y]$, что дало бы достаточные условия вида: $A^n[y_1] \geqslant y_1(x)$.

2. Рассмотрим в области G оператор:

$$B[y] = y(x) + \int_a^x Y(x, y)\, dx - X(x, y)\, dy.$$

$$X(x,y) > 1; \quad Y(x,y) = X(x,y)\,f(x,y); \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} < 0.$$

Функция $X(x, y)$ может быть найдена в форме:

$$X(x,y) = he^{-k(x-a)};\ k > \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Рассмотрим в области G семейство функций $y(x, C)$, принимающих при $x = a$ одно и то же значение y_0, допускающих производные $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial C}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial C}$ и удовлетворяющих при $x > a$ и при всех значениях C неравенству: $\frac{\partial y}{\partial C} > 0$.

Условимся говорить, что кривые $y = y(x, C)$ образуют центральное поле в G. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial C} B[y] = [1 - X(x,y)]\,\frac{\partial y}{\partial C} + \int\limits_a^x \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial C}\,dx < 0.$$

Методом, примененным в упомянутой выше заметке, приходим к заключению: оператор $B[y]$ преобразует центральное поле кривых в области G в некоторое новое центральное поле, «обращенное» по отношению к данному полю, т. е. из неравенства $y_1(x) < y_2(x)$ $(x > a)$ следует неравенство $B[y_1] > B[y_2]$ $(x > a)$. Пусть кривая $y = y_1(x)$ лежит в области G при $x > a$ ниже интегральной кривой $y = y(x)$, тоже принадлежащей области G и имеющей с кривой $y = y(x)$ общую точку $O(a, y_1(a))$. Рассматривая эти кривые, как входящие в некоторое центральное поле [хотя бы вида $y_1(x) + C(y(x) - y_1(x))$], получаем, что оператор B должен преобразовать кривую $y = y_1(x)$ в новую кривую, лежащую выше инвариантной кривой $y = y(x)$, чем и доказывается теорема:

Теорема I. *Если задано уравнение* (1) *и если функция* $X(x, y)$ *удовлетворяет в области* G *условиям*:

$$X(x,y) > 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} < 0,$$

то для того чтобы интегральная кривая $y = y(x)$ *уравнения* (1), *проходящая через точку* $O(a, y_1(a))$, *была при* $x > a$ *расположена в области* G *выше заданной кривой* $y = y_1(x)$, *тоже расположенной в этой области, необходимо*:

$$\int\limits_a^x [Y(x, y_1(x)) - X(x, y_1(x))\,y_1'(x)]\,dx > 0 \qquad (x > a).$$

3. Рассмотрим теперь функцию $X(x, y)$, удовлетворяющую в области G' $(a \leqslant x \leqslant b;\ y_1(x) \leqslant y \leqslant \partial)$, где $y = y_1(x)$—некоторая кривая в области G, условиям:

$$X(x,y) > 0; \quad \int\limits_{y_1(x)}^{y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy > 0; \quad (Y(x,y) = X(x,y)\,f(x,y)).$$

Заметим, что из второго неравенства следует, что интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

взятый по области D, составляющей часть G' и ограниченной снизу дугой кривой $y = y_1(x)$, сверху же любой кривой, пересекающей прямую, параллельную оси y только один раз, не может быть меньше 0.

Теорема II. *Если для всех значений $x > a$ выполняется неравенство*

$$\int_a^x [Y(x, y_1(x)) - X(x, y_1(x))\, y_1'(x)]\; dx \geqslant 0, \tag{3}$$

то интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $O(a, y_1(a))$, либо расположена в области G' над кривой $y = y_1(x)$ (при $x > a$), либо при некотором значении $x = x_1$, превосходящем a, пересекает прямую $y = \partial$.

Так как величина

$$f(x, y_1(x)) - y_1'(x)$$

положительна в интервале $a \leqslant x \leqslant a + h$ при достаточно малом h [что следует из неравенства (3)], интегральная кривая в этом интервале проходит над кривой $y = y_1(x)$, и достаточно доказать только, что эта кривая не может иметь второй точки пересечения с кривой $y = y_1(x)$, оставаясь в области G'. Предположим противное. Пусть $Q(x_1, y_1(x_1))$ есть точка пересечения кривых $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ и пусть OyQ и соответственно Oy_1Q — дуги этих кривых между точками O и Q. Обозначим через D область: $a \leqslant x \leqslant x_1$; $y_1(x) \leqslant y \leqslant y(x)$. Имеем по формуле Грина

$$\int_{OyQ} Y\,dx - X\,dy + \int_{Qy_1O} Y\,dx - X\,dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy > 0.$$

Но первый из интегралов левой части равен нулю, а второй существенно отрицателен по условию, что и дает противоречие, доказывающее теорему.

Примечание: Следующие соображения позволяют в отдельных случаях сравнивать силу признаков, рассмотренных здесь и в предыдущей заметке; пусть даны две функции $X_1(x, y)$ и $X_2(x, y)$ и пусть

$$Y_1(x, y) = X_1(x, y)\, f(x, y);\quad Y_2(x, y) = X_2(x, y)\, f(x, y).$$

Допустим, наконец, что в области G справедливы неравенства:

$$X_2(x, y) > X_1(x, y);\quad \frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} < \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}.$$

В этом случае, если кривая $y = y_1(x)$ расположена в области G под интегральной кривой, проходящей через точку $O(a, y_1(a))$ и расположенной тоже в области G, то

$$\int_a^x [Y_1(x, y_1(x)) - X_1(x, y_1(x))\, y_1'(x)]\, dx <$$

$$< \int_a^x [Y_2(x, y_1(x)) - X_2(x, y_1(x))\, y_1'(x)]\, dx.$$

Это вытекает из рассуждения, проведенного в § 2: обозначая

$$Y_3(x, y) = Y_2(x, y) - Y_1(x, y);\quad X_3(x, y) = X_2(x, y) - X_1(x, y),$$

имеем:

$$X_3(x, y) > 0,\quad \frac{\partial X_3}{\partial x} + \frac{\partial Y_3}{\partial y} < 0,$$

и следовательно, $\displaystyle\int_a^x [Y_3(x, y_1(x)) - X_3(x, y_1(x))\, y_1'(x)]\, dx < 0 \quad (x > a).$

4. Рассмотрим в заключение пример на применение рассмотренных признаков. Дано уравнение 2-го порядка

$$u'' + p(x)\,u = 0, \tag{4}$$

где $p(x)$ — непрерывная периодическая функция периода ω, не равная тождественно нулю. Подстановкой $y = \frac{u'}{u}$ сводим данное уравнение к уравнению Риккати:

$$y' = -[y^2 + p(x)]. \tag{5}$$

Непрерывному для всех значений x решению этого последнего уравнения соответствует неколеблющееся решение уравнения (4) и, обратно, в силу соотношения

$$u(x) = u_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} y(x)\,dx}.$$

Таким образом необходимое и достаточное условие существования у уравнения (4) неколеблющихся решений есть наличие у уравнения (5) действительного, непрерывного для всех значений x решения.

Необходимое условие для существования таких решений уравнения (5) есть

$$-\int\limits_0^{\omega} p(x)\,dx > 0. \tag{6}$$

В самом деле, допустим обратное:

$$-\int\limits_0^{\omega} p(x)\,dx \leqslant 0. \tag{6$'$}$$

Равенство $$y(x) = y(a) - \int\limits_a^x [y^2(x) + p(x)]\,dx$$

показывает, что если $y(x)$ есть непрерывное решение уравнения, то последовательность: $y(a)$, $y(a+\omega)$, ..., $y(a+n\omega)$, ... монотонно убывающая, и непрерывного периодического решения уравнения (5) быть не может. Допуская, что решение $y(x)$ непрерывно, приходим к одному из двух возможных случаев: или последовательность сходится:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} y(a+n\omega) = y_0,$$

но тогда решение, равное y_0 при $x = a$, должно быть, как легко показать, периодическим, что противоречит только что сказанному; вторая возможность:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} y(a+n\omega) = -\infty$$

тоже исключается, так как решение, становящееся при некотором значении x равным отрицательному числу, достаточно большому по абсолютной величине, становится бесконечным при некотором конечном значении x, что легко доказывается сравнением уравнения (5) с уравнением

$$y' = -[y^2 - h^2],$$

где h — достаточно большая постоянная. Следовательно, при выполнении неравенства (6$'$) не может быть непрерывного действительного (для всех значений x) решения уравнения (5), а следовательно, и неколеблющегося решения у уравнения (4). Пусть выполнено неравенство (6) и пусть a число такое, что

$$-\int_a^x p(x)\,dx > 0 \quad (x > a)$$

[существование такого числа вытекает из неравенства (6)]. Поставим задачу: определить, при каких условиях у уравнения (5) есть решение, равное 0 при $x=a$ и положительное при $x>a$. Это решение, очевидно, непрерывно при всех x и его существование дает достаточное условие того, что решения уравнения (5) неколеблющиеся. Метод бесконтактных кривых дает для существования нужного нам решения уравнения (5) известное условие:

$$p(x) \leqslant 0. \tag{7}$$

Применим методом предшествующей заметки: из неравенства

$$y(x) < -\int_a^x p(x)\,dx$$

следует, что искомое решение принадлежит области G':

$$x \geqslant a; \quad 0 \leqslant y \leqslant S_1(x) = -\int_a^x p(x)\,dx.$$

Обозначим

$$S(x) = \int_a^x S_1(x)\,dx; \quad X(x,y) = e^{2S(x)}; \quad Y(x,y) = -e^{2S(x)}[y^2 + p(x)].$$

Теперь имеем в области G'

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = e^{2S(x)}[2S_1(x) - 2y] \geqslant 0.$$

Применяя метод § 1 к функции $y_1(x)=0$, приходим к достаточному условию существования решения уравнения (5), положительного при $x=a$ и равного 0 при $x>a$:

$$-\int_a^x e^{2S(x)} p(x)\,dx \geqslant 0 \quad (x > a). \tag{8}$$

Это условие явно слабее, чем условие (7). Применим метод § 3. Достаточно положить $X(x,y) = e^{S(x)}$; $Y(x,y) = -e^{S(x)}[y^2 + p(x)]$, и в области G' имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = e^{S(x)}[S_1(x) - 2y]; \quad \int_0^y \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy \geqslant 0$$

и, следовательно, искомое достаточное условие имеет вид:

$$-\int_a^x e^{S(x)}\, p(x)\,dx \geqslant 0 \quad x > a.$$

Для функций $p(x)$ таких, что $e^{S(\omega)} < 2$, это условие слабее условия (8). Доказательство основано на применении примечания к § 3.

Государственный университет
Свердловск

Поступило
7 X 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Адамов, ДАН, XVIII, № 4—5 (1938).