Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 6

МАТЕМАТИКА

В. С. ФЕДОРОВ

О МОНОГЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 22 V 1944)

Обозначаем всегда в дальнейшем через u и v или P и Q действительные функции действительных переменных x, y и z, однозначные и непрерывные в некоторой области D (открытом и связном множестве точек пространства), так же как и их частные производные до второго порядка включительно. Мы будем писать

$$u+iv\sim\vec{a} \tag{1}$$

если в каждой точке области D имеем

$$\nabla u=\nabla v\times\vec{a},\qquad \nabla v=\vec{a}\times\nabla u$$

и $\nabla u\times\nabla v$ отлично от нуля; $\vec{a}$ — вектор (функция точки (x, y, z)) и $i^2=-1$.

Очевидно, что функции $u+iv$ соответствует такой вектор $\vec{a}$ при следующем необходимом и достаточном условии: в каждой точке области D имеем:

$$\nabla u\cdot\nabla v=0,\qquad (\nabla u)^2=(\nabla v)^2\neq 0. \tag{2}$$

Это свойство (2) равносильно следующему свойству функции $u+iv$: для всякой точки M области D существуют для всякого луча l, выходящего из M, такие лучи λ и t, выходящие из M, что 1) $t\perp l$, $\lambda\perp l$, 2) $\partial u/\partial l=\partial v/\partial t$, $\partial u/\partial\lambda=\partial v/\partial l$ в этой точке M и ∇u отличен от нуля в области D.

Заметим, что функции u и v, обладающие свойством (2), могут быть как гармоническими, так и не гармоническими в области D. Например, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=z$ или $u=x^2+y^2-z^2$, $v=2z\sqrt{x^2+y^2}$ и т. д. Автор доказал следующие теоремы:

Теорема 1. *Из соотношения (1) следует*

$$f(u+iv)\sim\vec{a},\qquad f(u-iv)\sim-\vec{a}$$

для всякой аналитической функции $f(u+iv)$, голоморфной и имеющей отличную от нуля производную для значений $u+iv$, принимаемых этой функцией в области D.

Теорема 2. *Из соотношений*

$$u+iv\sim\vec{a}\qquad P+iQ\sim\vec{a}$$

следует, что существует такая окрестность B всякой точки области D, в которой $P+iQ$ есть аналитическая функция от $u+iv$, голоморфная и имеющая производную, отличную от нуля, для значений $u+iv$ в области B.

Теорема 3. *Пусть $u+iv \sim \nabla\varphi(x, y, z)$, т. е. имеем в каждой точке области D:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}$$

и ∇u отличен от нуля в области D.

Все функции u, v, φ, удовлетворяющие этим дифференциальным уравнениям, имеют следующий вид: или

$$\varphi=r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$$

где α, β и γ — произвольные действительные постоянные, или φ — линейная функция от x, y, z. Функция $u+iv$ — гармоническая и, кроме того, $u+iv=f(\zeta)$, где $f(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция и где или $\zeta=\frac{x-\alpha+i(y-\beta)}{z-\gamma+r}$ (в случае $\varphi=r$) или $\zeta=ax+by+cz$, где a, b, c — произвольные комплексные постоянные при условии $a^2+b^2+c^2=0$ (функция φ — линейная от x, y и z).

Теорема 4. *Функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$, гармонические в некоторой области и удовлетворяющие в этой области уравнениям $\nabla u \cdot \nabla v=0$, $\nabla v \cdot \nabla w=0$, $\nabla u \cdot \nabla w=0$, $(\nabla u)^2=(\nabla v)^2=(\nabla w)^2$, являются линейными функциями от x, y и z.*

Энергетический институт,
Иваново

Поступило
22 V 1944