Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. П. РОМАНОВ

ОБ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 III 1944)

В настоящей статье $\mu(n)$ означает известную функцию Мебиуса, удовлетворяющую соотношению

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

(n, m) будет означать общий наибольший делитель чисел n, m; $\sum\limits_{d \mid n}$ — сумму по делителям n. Согласно известному принципу обращения из

$$a_n = \sum_{d \mid n} b_d \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

следует

$$b_n = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и наоборот.

Для дальнейшего важна лемма: если $k < n$, $f(u)$ — любая функция, то $\sum\limits_{d \mid n} f((k, d))\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0$.

Введем при фиксированном N операции A и B над любыми функциями целочисленного аргумента n:

операция A переводит $f(n)$ в $Af(n) = f((n, N))$,

операция B переводит $f(n)$ в $Bf(n) = \varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) f(n)$,

где $\varepsilon(u) = 1$, если u целое число, $\varepsilon(u) = 0$ в противном случае. Также положим

$$Sf(n) = \sum_{d \mid n} f(d), \quad S^{-1}f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d), \quad Ef(n) = f(n).$$

По принципу обращения $SS^{-1} = S^{-1}S = E$.

Далее,

$$SBf(n) = \sum_{d \mid n} \varepsilon\left(\frac{N}{d}\right) f(d) = \sum_{d \mid n} f(d) = \sum_{d \mid (n, N)} f(d) = ASf(n),$$

$$SB = AS, \quad S^{-1}AS = B, \quad S^{-1}A = BS^{-1},$$

$$S^{-1}Af(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f((d, N)) = BS^{-1}f(n) = \varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

Полагая $N = k$ и учитывая $\varepsilon(k/n) = 0$, получим указанную лемму.

Рассмотрим пространство Гильберта в аксиоматической форме Неймана — Отона. Последовательность элементов из H $f_1, f_2, f_3, \ldots$ назовем обладающей свойством D, точнее D_g, если $(f_n, f_m) = g((n, m))$, где $g(u)$ — любая вещественная функция целого аргумента u. Тогда система элементов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, заданная соотношениями

$$\gamma_n = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ортогональна, т. е. $(\gamma_n, \gamma_m) = 0$, если $m \neq n$.

В самом деле, если $k < n$,

$$(\gamma_n, f_k) = \left(\sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, f_k\right) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)(f_k, f_d) =$$

$$= \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g((k, d)) = 0.$$

Здесь использована доказанная выше арифметическая лемма. Таким образом, γ_n ортогонален ко всем f с индексами, меньшими, чем n, а следовательно, к γ_m при $m < n$, которое есть линейная комбинация таких f. Процесс ортогонализации по E. Schmidt'у для последовательности, обладающей D-свойством, совпадает, таким образом, с процессом обращения по Мебиусу, играющему исключительно важную роль в теории чисел, и притом не зависит от $g(u)$*.

Если

$$G(n) = S^{-1} g(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

то систему $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ можно нормировать. Мы имеем следующий результат: если $f_1, f_2, f_3, \ldots$ обладает D_g-свойством, то $\psi_1, \psi_2, \ldots$, где $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, есть ортонормированная система H.

Что предыдущие результаты не беспредметны, я показал путем построения разнообразных и многочисленных примеров систем, обладающих D_g-свойством, прежде всего для случая любой $g(n)$, обладающей свойствами $g(n) > 0$, $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g(k)} < \infty$, $\quad g(a)\,g(b) = g(1)\,g(ab)$ при любых целых a, b. В случае сепарабельного H можно построить бесчисленное множество примеров последовательностей $f_1, f_2, f_3, \ldots$, которые кроме D-свойства обладают также полнотой, т. е. таких, что совокупность полиномов вида $\sum_{i=1}^{N} c_i f_i$ образует всюду плотное в H множество, и тогда система $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ будет полной во всех смыслах ортонормированной системой.

Из

$$\sqrt{G(n)}\,\psi_n = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \tag{1}$$

и из принципа обращения Мебиуса следует

$$f_n = \sum_{d \mid n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d. \tag{2}$$

---

* Причина этого явления лежит в следующем. Определитель $|c_{ik}|_n$, где $c_{ik} = g((i, k))$, имеет адъюнкты $A_{k,n}$ последнего столбца пропорциональными числам $\mu(n/k)$, т. е. $A_{k,n} = A\mu(n/k)$, где $\mu(u)$ определено, как обычно, если u целое число, и $\mu(u) = 0$, если u не целое, где только A зависит от выбора g.

Вводя f_n^* по формуле

$$f_n^* = \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{\sqrt{G(d)}} \psi_d, \tag{3}$$

имеем

$$(f_n, f_m^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (n, m) > 1, \end{cases}$$

так как $(f_n, f_m^*) = \sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \mid m}} \mu(d) = \sum\limits_{d \mid (n, m)} \mu(d)$.

На основании (1) и (3) получаем

$$f_n^* = \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{G(d)} \sum_{\delta \mid d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) f_\delta = \sum_{d \mid n} k_n(d) f_d,$$

где

$$k_n(d) = \sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} \frac{\mu(d\delta)\,\mu(\delta)}{G(d\delta)}.$$

В частности, если $g(u)$ обладает свойством мультипликативности $g(a)\,g(b) = g(ab)$, то

$$G(n) = g(n) \prod_{p \mid n} (1 - g(p)^{-1}), \quad k_n(d) = \frac{\mu(d)}{G(d)} \sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} \frac{\mu(\delta)^2}{G(\delta)} = \frac{\mu(d)\,g(n)}{g(d)\,G(n)}.$$

Отсюда получаем:

$$(f_n^*, f_m) = \frac{g(n)}{G(n)} \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{g(d)} g((d, m)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (n, m) > 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $g(n)$ — любая мультипликативная функция, для которой

$$G(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом можно получить много арифметических тождеств, которые иначе получаются лишь из довольно сложных комбинаторных соображений. Совершенно неформальные тождества получаем, если к предыдущим соображениям добавляются соображения полноты систем гильбертова пространства. На этом пути мне удалось получить большое количество разнообразных арифметических тождеств.

Укажу, опуская почти очевидное доказательство, следующий результат: если $\omega(n) \geqq 0$, $\omega(a)\,\omega(b) = \omega(ab)$, $\sum\limits_{=1}^{\infty} \omega(k)^2 < \infty$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ есть ортонормированная система H, то $f_1, f_2, f_3, \ldots$, где $f_n = \omega(n)^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k)\,\alpha_{kn}$, обладают D_g-свойством со значением $g(u) = \frac{\sigma}{\omega(u)^2}$, $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2$.

Далее, можно показать, что если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ образуют полную систему H, то и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ образуют полную систему H.

Закончим следующим замечанием.

Необходимое и достаточное условие для существования последовательности, обладающей D_g-свойством, может быть дано в следующей форме

$$G(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geqslant 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Условие достаточно ибо, если оно выполнено, последовательность $f_n = \sum_{d \mid n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ обладает D_g-свойством, если $\psi_1,\ \psi_2 \ldots$ любая ортонормированная последовательность H. В самом деле,

$$(f_n,\ f_m) = \left(\sum_{d \mid n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d,\quad \sum_{\delta \mid m} \sqrt{G(\delta)}\,\psi_\delta\right) = \sum_{d \mid (n,\ m)} G(d) = g((n,\ m)).$$

Оно необходимо, так как если $f_1,\ f_2, \ldots$ обладает D_g-свойством, то $\sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = (\gamma_n,\ \gamma_n) \geqslant 0$, где $\gamma_n = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$.

Если $G(n)$ — любая функция, причем $G(n) > 0$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$, и элементы последовательностей $f_1,\ f_2, \ldots,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots$ связаны соотношениями $f_n = \sum_{d \mid n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d$, то $\psi_1,\ \psi_2, \ldots$ ортонормирована тогда и только тогда, когда $f_1,\ f_2, \ldots$ обладает D_g-свойством с $g(n) = \sum_{d \mid n} G(d)$.

Физико-технический институт
Томск

Поступило
25 III 1944