Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 7

ФИЗИКА

В. А. ДМИТРИЕВ

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 23 VI 1940)

1. Для большинства металлов в области температур и магнитных полей, доступных опыту, достаточно рассматривать действие магнитного поля на электроны проводимости только как кинетическое возмущение, практически не изменяющее собственных функций и собственных значений для связанных электронов в кристаллической решетке металла. Действительно, непосредственное действие магнитного поля будет заметным лишь при условии $\mu H \sim kT$, где μ — магнетон Бора; этот критерий может измениться только для металлов с аномально малой эффективной массой (висмут является единственным реальным примером).

2. Пусть в однородном металле действует электрическое поле E и магнитное поле H. Отклонение функции распределения от равновесного ее значения будем искать в лорентцовой форме:

$$\rho - \rho_0 = \frac{d\rho_0}{dz}\varphi, \tag{1}$$

где $z = \frac{\varepsilon - \zeta}{kT}$ — аргумент равновесной функции распределения:

$$\rho_0 = \frac{1}{e^z + 1}.$$

В таком случае φ определится из кинетического уравнения:

$$-\rho_0 e^{\frac{\varepsilon}{kT}} v_\alpha \left\{\frac{e}{kT} E_\alpha + \frac{e}{\hbar c} H_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial k_\beta}\right\} = \int W_{kk'}\rho^0_{k'}(\varphi_k - \varphi_{k'})\, d\omega_{k'}. \tag{2}$$

Здесь k — волновой вектор электрона, $\hbar k$ — квазиимпульс, ε_k — энергия в состоянии k, e — заряд электрона, $H_{\alpha\beta}$ — тензор магнитного поля, $W_{kk'}$ — вероятности перехода $k \rightleftarrows k'$, вызываемые термическими колебаниями решетки, $d\omega_{k'} = dk'_1\, dk'_2\, dk'_3$ — элемент объема в пространстве волновых векторов, v_α — средняя (групповая) скорость электрона.

3. Для того чтобы уравнение (2) приняло математически определенный вид, необходимо задать ε_k, $v_\alpha = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_\alpha}$ и $W_{kk'}$, как явные функции от квазиимпульса.

Единственным общим свойством всех функций от k является их периодичность с периодом обратной решетки, вытекающая из свойств волновых функций (модулированные плоские волны). Поэтому все функции от k могут быть представлены кратными рядами Фурье, которые мы напишем так:

$$\varepsilon = \sum_n A_n e^{i(kn)}, \tag{3}$$

$$v_\alpha = \frac{i}{\hbar}\sum_n n_\alpha A_n e^{i(kn)}, \tag{4}$$

$A_n = A_{-n}$ — обменные интегралы

$$W_{kk'} = \sum_{m,n} \mathfrak{G}_{mn}(\eta)\, e^{i(km)} e^{i(k'n)}. \tag{5}$$

Сохраняем в последнем выражении, кроме явной зависимости от k и k', аргумент $\eta = \frac{\hbar\omega_q}{kT}$, где $\hbar\omega_q$ — энергия фонона. В аналогичной форме ищем функцию φ

$$\varphi_k = \sum_n X_n e^{i(kn)}, \tag{6}$$

$$X_n = -X_{-n}$$

и благодаря сохранению квазиимпульса при взаимодействии с фононом решетки

$$\varphi_{k'} = \sum_n X_n e^{i(k+q,n)}, \tag{7}$$

где q — волновой вектор фонона.

4. Правая часть интегрального уравнения (2), будучи умножена на $e^{-\frac{\zeta}{kT}} \rho_k^0$, представляет собой скорость изменения функции распределения вследствие ударов решетки:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{d\rho^0}{dz} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\rho_k^0} \int W_{kk'} \rho_{k'}^0 (\varphi_k - \varphi_{k'})\, d\omega_{k'}.$$

Подставив в правую часть ряды (5—7) и преобразуя интеграл к переменным для фононов (q, η), найдем:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{d\rho_0}{dz} \sum_n \frac{1}{\tau_n} X_n e^{i(kn)}, \tag{8}$$

где

$$\frac{1}{\tau_n} = \sum_{l,m} e^{i(k,l+m)} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\rho_z^0} \int_0^{\frac{\theta}{T}} \rho_{z+\eta}^0 \Delta_q \mathfrak{G}_{mn}^{(\eta)} \int_S e^{i(ql)} \{1 - e^{i(qn)}\} \frac{dS\, d\eta}{|\nabla_q \eta|}. \tag{9}$$

Здесь Δ_q — плотность состояний в пространстве q, интегрирование по поверхности S — постоянной энергии ($\eta = \text{const}$) и по переменной η в пределах $0 - \frac{\theta}{T}$; θ — характеристическая температура Дебая.

Равенство (8) аналогично больтцманн-лорентцовскому предположению

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{(\rho - \rho_0)}{\tau}$$

и является обобщением для микроскопически анизотропных условий теоремы о существовании «времени свободного пробега», доказываемой обычно ([1]) при упрощенных предположениях (энергия электрона — квадратическая функция от k) и только для высоких температур $T \gg \theta$.

5. Полагая

$$\frac{1}{\tau_n} = \sum_m \nu_{nm} e^{i(km)}, \tag{10}$$

где коэффициенты релаксации ν_{nm} константы, найдем для X_n следующую систему уравнений, получающуюся из (2) после подстановки рядов, определенных выше, умножения на $e^{-i(kn)}$ и интегрирования по $d\omega_k$:

$$-\frac{e}{kT} \frac{i}{\hbar} A_n n_\alpha E_\alpha - \frac{e}{\hbar^2 c} \sum_m A_{n-m} n_\alpha H_{\alpha\beta} m_\beta X_m = \sum_e X_{n-e} \nu_{(e|n-e)}. \tag{11}$$

Отсюда

$$X_n = -\frac{e}{kT}\frac{i}{\hbar}\frac{1}{D}\sum_m A_m m_\alpha E_\alpha \Delta_{mn}, \tag{12}$$

где D — определитель системы (11), Δ_{mn} — алгебраические дополнения к его элементам

$$D_{mn} = \left\{\nu_{(m-n|n)} + \frac{e}{\hbar^2 c} A_{m-n} m_\alpha H_{\alpha\beta} n_\beta\right\}. \tag{13}$$

6. Для определения порядка величины и температурной зависимости коэффициентов релаксации достаточно определить коэффициенты $\mathfrak{G}_{mn}(\eta)$, как среднее (по углу между k и q) значение вероятности $W_{kk'}$, вычисляемой обычными методами ([1]), что приводит к следующему результату:

$$\mathfrak{G}_{mn} \simeq \frac{\bar{\varepsilon}^2 e^{\eta + \frac{\varepsilon}{kT}}}{GMu\frac{d\varepsilon}{d|k|}(e^\eta - 1)}, \tag{14}$$

где $\bar{\varepsilon}_k \sim$ средней энергии электрона в состоянии k, G — число узлов решетки в рассматриваемой области кристалла (области периодичности), M — масса атома решетки, u — скорость звука.

В подинтегральном выражении (9) $e^{i(qn)} = \cos(qn)$ в силу того, что $X_n = -X_{-n}$, $W_{kk'} = W_{k'k}$. Кроме того можно разложить в ряд по параметру (qn), так как $n \sim a$ (вследствие быстрого убывания коэффициентов Фурье с номером n) $q \sim \frac{1}{a}$, где a — постоянная решетки. Это приводит к обычной оценке температурной зависимости для предельных случаев $T \gg \theta$; $\tau \sim T^{-1}$; $T \ll \theta$; $\tau \sim T^{-5}$.

7. Коэффициентами X_n из (12) определяется функция φ:

$$\varphi = -\frac{e}{kT}\frac{i}{\hbar}\frac{1}{D}\sum_{m,n} e^{i(kn)} A_m m_\alpha E_\alpha \Delta_{mn} \tag{15}$$

плотность тока:

$$J_\alpha = \frac{e}{4\pi^3}\int \frac{d\rho_0}{dz} v_\alpha \varphi \, d\omega_k \tag{16}$$

и коэффициенты электропроводности в магнитном поле:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(H)} = -\frac{e^2}{4\pi^3 kT D}\sum_{m,n} A_n n_\alpha A_m m_\beta \Delta_{mn} \int \frac{d\rho_0}{dz} d\omega. \tag{17}$$

Для вычисления коэффициентов Δ_{mn} и D в конкретных случаях достаточно ограничиться значениями m и n, соответствующими первой координационной группе. Для всех гальваномагнитных коэффициентов получается в общем случае «насыщение» в сильном магнитном поле, что, повидимому, не противоречит опыту ([2]).

Ротационные диаграммы также могут быть рассчитаны, если численные значения коэффициентов A_{m-n}, $\nu_{mn} \sim \frac{1}{\tau}$ определить по экспериментальным данным.

Молотовский гос. университет
г. Молотов

Поступило
25 VI 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Wilson, The Theory of Metals, Cambridge (1936). [2] E. Justi u. H. Scheffers, Phys. ZS., 3 (1938).