Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

ПОЛИНОМЫ МАССО И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НОМОГРАММ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VII 1940)

1. Полиномы Массо. Под полиномом Массо понимается полином $F(t_1, t_2, t_3)$, содержащий неприводимый множитель от всех трех переменных и допускающий рациональную анаморфозу, т. е. полином, для которого существует тождественно равный ему определитель Массо

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv | f_{i1}(t_i) f_{i2}(t_i) f_{i3}(t_i) |, \tag{1}$$

где $f_{ij}(t_i)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ — также полиномы.

Номографические интерпретации полиномов Массо, отличающихся лишь множителями, зависящими от одной переменной, тождественны. Полином Массо, свободный от таких множителей, назовем приведенным; такие полиномы не могут содержать кратных множителей.

Если анаморфоза (1) приведенного полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ является нормальной, т. е. в отвечающей ей номограмме каждая переменная t_i является бирациональной функцией точек своего базиса C_i, то таким же свойством будет обладать и всякая другая анаморфоза того же полинома. Такой полином назовем нормальным. Для нормального полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ порядок базиса какой-либо переменной равен порядку $F(t_1, t_2, t_3)$ относительно этой переменной; в частности, все его номограммы обладают одним и тем же жанром, который назовем жанром нормального полинома.

Нормальные полиномы могут содержать не более одного множителя от каждой пары переменных, причем это будет в том и только в том случае, когда базисы этих переменных совпадают; сверх того, этот множитель является линейным относительно каждой переменной.

Если имеются две номограммы данного нормального полинома жанра большего нуля, то надлежащим выбором проективной системы координат в плоскости каждой номограммы можно всегда добиться того, что точки этих номограмм, обладающие одинаковыми пометками, будут иметь равные координаты и, следовательно, все номограммы такого полинома коллинеарны. Эта теорема не будет верна лишь для случая полиномов нулевого жанра с дискриминантом, отличным от нуля.

Каждый приведенный полином Массо

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv | f_{i1}(t_i) f_{i2}(t_i) f_{i3}(t_i) | \tag{1}$$

может быть рассматриваем как результант по τ_1, τ_2, τ_3 системы полиномов

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \tag{2}$$

$$\varphi_i(t_i, \tau_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

где

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv | \psi_{i1}(\tau_i) \psi_{i2}(\tau_i) \psi_{i3}(\tau_i) | \tag{4}$$

нормальный полином Массо, а полиномы $\varphi_i(t_i, \tau_i)$ линейны относительно τ_i

$$\varphi_i(t_i, \tau_i) \equiv \varphi_{i1}(t_i) - \tau_i \varphi_{i2}(t_i). \tag{5}$$

Полином $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ назовем нормальной частью полинома $F(t_1, t_2, t_3)$, его анаморфозу (4) — нормальной частью анаморфозы (1), а уравнение

$$\varphi_i(t_i, \tau_i) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

уравнением инволюции переменной t_i.

Совокупность анаморфозы (4) и уравнений (6) назовем нормальной формой анаморфозы (1). Нормальная форма данной анаморфозы фактически может быть найдена с помощью алгоритма Люрота, дающего возможность отыскать бирациональный параметр кривой нулевого жанра.

Две анаморфозы A и A' данного полинома Массо могут быть приведены к таким нормальным формам, что полином уравнения инволюции любой переменной t_i будет одинаков в каждой из этих форм. Тогда будут тождественны также и полиномы нормальных частей этих анаморфоз. Отсюда следует коллинеарность всех номограмм (анаморфоз) данного полинома Массо, если только он не является полиномом жанра нуль с дискриминантом, отличным от нуля.

II. Рациональные преобразования номограмм. Под уравнением Массо понимается неприводимое уравнение

$$F(t_1, t_2, t_3) = 0, \tag{7}$$

для которого существует полином Массо $F_1(t_1, t_2, t_3)$, отличающийся от $F(t_1, t_2, t_3)$ множителями не более как от двух переменных каждый. Каждая из анаморфоз (номограмм) полинома $F_1(t_1, t_2, t_3)$ называется анаморфозой (номограммой) уравнения (7).

Преобразование плоскости X некоторой номограммы N уравнения (7), выражаемое формулами

$$\rho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

где f_i — формы одинакового порядка, назовем допустимым, если новая номограмма N' (в плоскости X') является номограммой того же самого уравнения (7).

Преобразование (8) не увеличивает числа базисных кривых, все неприводимые множители от двух переменных, входящие в $F_1(t_1, t_2, t_3)$, будут входить также и в $F_1'(t_1, t_2, t_3)$-полином новой анаморфозы. Поэтому в случае допустимых преобразований имеет место тождество

$$F_1'(t_1, t_2, t_3) \equiv F_1(t_1, t_2, t_3) \cdot \psi_1'(t_2, t_3) \cdot \psi_2'(t_3, t_1) \cdot \psi_3'(t_1, t_2), \tag{9}$$

где ψ_i' — некоторые полиномы.

Поставим себе задачей выделение тех уравнений Массо, для номограмм которых существуют допустимые преобразования, неэквивалентные коллинеации номограммы. Не уменьшая общности, можно считать, что линейная система

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (10)$$

преобразования (8) является неприводимой.

Допустимое преобразование переводит нормальную анаморфозу также в нормальную (если считать преобразованный полином приведенным). Преобразование (8) тогда и только тогда является допустимым для анаморфозы какого-либо уравнения, если оно допустимо для ее нормальной части. Отсюда следует, что сеть допустимого преобразования не может определять ни на одной из базисных кривых составного ряда.

Допустимое преобразование, не изменяющее числа базисов переменных, эквивалентно коллинеации номограммы. Отсюда следует, что допустимых преобразований, неэквивалентных коллинеации номограммы, среди преобразований Кремона не существует. Если, однако, ввести в рассмотрение номограммы с криволинейным индексом, то можно утверждать, что преобразование Кремона плоскости x преобразует номограмму данного уравнения в номограмму того же самого уравнения, если в плоскости X' новой номограммы за отчетную систему принять сеть преобразования, обратного первому.

Из указанных свойств преобразований следует, что остается рассмотреть лишь случай преобразования, уменьшающего число базисов переменных, с сетью, определяющей на каждой базисной кривой простой ряд; причем достаточно ограничиться нормальными анаморфозами. Исследование трех возможных случаев таких преобразований показывает, что допустимые преобразования, неэквивалентные коллинеации, могут существовать лишь для номограмм уравнений третьего номографического порядка.

Примером может служить преобразование типа

$$\rho x'_m = \sum_{i, j, k=1}^{3} a_{ijk}^{(m)} x_i x_j x_k \qquad (m = 1, 2, 3), \qquad (11)$$

изменяющее жанр номограммы данного уравнения третьего номографического порядка с дискриминантом, равным нулю.

Поступило
6 VII 1940