



Будем рассматривать  $u, z, \psi$  как декартовы координаты и будем исследовать решения системы (2), определяемые требованием непрерывности  $u(t'), z(t'), \psi(t')$  в точках разрыва  $f(u, z, \psi)$  и  $g(u, z, \psi)$ . Фазовое пространство  $u, z, \psi$  заполнено кусками траектории, лежащими: 1) в плоскостях  $u = c = \text{const}$  для  $|\psi| < \psi_0$ , 2) в цилиндрических поверхностях  $z = ce^u - 1$  для  $\psi > \psi_0$ , 3) в цилиндрических поверхностях  $z = ce^{-u} + 1$  для  $\psi < -\psi_0$ . На плоскостях  $\psi = \pm \psi_0$  происходит соединение траекторий. «Пластинки» ( $\sigma$ ):  $\psi = \psi_0, 0 < u + (A-1)z < B$  и ( $\sigma'$ ):  $\psi = -\psi_0, -B < u + (A-1)z < 0$ , сами разбитые на траектории, служат местом соединения траекторий противоположных направлений. Изображающая точка, достигая пластинки, продолжает свое движение по траектории разбиения пластинки и покидает последнюю, дойдя до ее края. На частях плоскостей  $\psi = \pm \psi_0$ , не принадлежащих пластинкам  $\sigma$  и  $\sigma'$ , происходит соединение траекторий одинакового направления. Отрезок  $u = z = 0, |\psi| \leq \psi_0$ , является отрезком покоя.

2. Уравнения (2) определяют преобразование плоскости  $\psi = \psi_0$  (в состав которой входит пластинка  $\sigma$ ) в самое себя. Разобьем плоскость  $u, z$  ( $\psi = \psi_0$ ) на четыре куска:

$G^{(1)}$  — содержащий те точки, для которых  $u + (A-1)z - B > 0$  или  $u + (A-1)z - B = 0, u > A + B$ ;

$\bar{G}^{(1)}$  — содержащий те точки пластинки  $\sigma$ , которые по траекториям разбиения пластинки переходят в точки «ребра» ( $L$ ):  $u + (A-1)z = 0, u < 0, \psi = \psi_0$ . Само ребро  $L$  не включается в  $\bar{G}^{(1)}$ .

$G^{(2)}$  — содержащий те точки пластинки  $\sigma$ , которые по траекториям разбиения пластинки переходят в ребро ( $M$ ):  $u + (A-1)z - B = 0, u > A + B$  ( $\psi = \psi_0$ ). Само ребро  $M$  не включается в  $G^{(2)}$ .

$G^{(3)}$  — содержащий те точки, для которых  $u + (A-1)z < 0$  или  $u + (A-1)z = 0, z < 0$ .

Обозначим через  $H^{(1)}, \bar{H}^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}$  куски плоскости  $\psi = -\psi_0$ , соответственно симметричные  $G^{(1)}, \bar{G}^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}$  относительно начала координат, а  $L', M'$  — полупрямые, симметричные  $L$  и  $M$ .

Если начальная точка  $u = u_0, z = z_0, \psi = \psi_0$  ( $\psi = -\psi_0$ ) принадлежит  $\bar{G}^{(1)}$  ( $\bar{H}^{(1)}$ ), то в силу (2) она попадает в точку ребра  $L$  ( $L'$ ), принадлежащую  $G^{(3)}$  ( $H^{(3)}$ ). Такой переход точки  $u_0, z_0$  будем называть преобразованием  $\bar{E}^+$  ( $\bar{E}^-$ ). Если начальная точка принадлежит  $G^{(2)}$  ( $H^{(2)}$ ), то в силу (2) она попадает в точку ребра  $M$  ( $M'$ ), принадлежащую  $G^{(1)}$  ( $H^{(1)}$ ). Такой переход будем называть преобразованием  $E^+$  ( $E^-$ ). Если начальная точка  $u_0, z_0$  ( $t' = 0$ ) принадлежит  $G^{(1)}$  ( $H^{(1)}$ ), то покидая в силу (2) плоскость  $\psi = \psi_0$  ( $\psi = -\psi_0$ ) при  $t' = 0$ , она при  $t' = \tau$  снова попадает на ту же плоскость в точку  $u_1, z_1$ , принадлежащую  $G^{(3)}$  ( $H^{(3)}$ ),  $\bar{G}^{(2)}$  ( $\bar{H}^{(2)}$ ) или  $\bar{G}^{(1)}$  ( $H^{(1)}$ ). Такой переход будем называть преобразованием  $S^+$  ( $S^-$ ). Если же начальная точка  $u_0, z_0, \psi = \psi_0$  ( $\psi = -\psi_0$ ) принадлежит  $G^{(2)}$  ( $H^{(2)}$ ), то для  $t' = \tau'$  она попадает в точку  $u_1, z_1$  плоскости  $\psi = -\psi_0$  ( $\psi = \psi_0$ ). Такой переход будем называть преобразованием  $S_0^+$  ( $S_0^-$ ). Преобразования  $S^+$  и  $S_0^+$  даются формулами

$$(S^+) \begin{cases} z_0 = (1 + \zeta) e^\tau - 1, & z_1 = \zeta, \\ u_0 = (A-1)(1 + \zeta) \frac{1 - e^\tau}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1, & u_1 = u_0 - \tau \end{cases} \quad (3)$$

$$(S_0^+) \begin{cases} z_0 = \zeta, & z_1 = \zeta e^{-\tau'}, \\ u_0 = \frac{(A-1)(e^{-\tau'} - 1)\zeta - 2\psi_0}{\tau'}, & u_1 = u_0 \end{cases} \quad (4)$$

3. Преобразование  $S_0^+$  переводит ребро  $L$  в кривую  $\Gamma$ , лежащую на плоскости  $\psi = -\psi_0$ ,

$$u = \frac{2\psi_0}{1 - \tau' e^{-\tau'}}, \quad z = \frac{2\psi_0}{(A-1)(1 + \tau' e^{\tau'} - e^{\tau'})} \quad (0 < \tau' < \infty). \quad (5)$$

Возьмем луч  $z = ku$ , где  $k$  определяется уравнением (6), если  $4B - (A+B)^2 > 0$ , или (7), если  $4B - (A+B)^2 < 0$ .

$$B \exp \left[ \frac{2(A+B)}{\sqrt{4B - (A+B)^2}} \operatorname{arctg} \frac{[(A-1)k+1]\sqrt{4B - (A+B)^2}}{(A-1)(A+B)k + A - B} \right] = \\ = (A-1) [(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1] \quad (0 < \operatorname{arctg} < \pi), \quad (6)$$

$$B \exp \left[ \frac{2(A+B)}{\sqrt{(A+B)^2 - 4B}} \operatorname{arth} \frac{[(A-1)k+1]\sqrt{(A+B)^2 - 4B}}{(A-1)(A+B)k + A - B} \right] = \\ = (A-1) [(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1]. \quad (7)$$

Точки  $\bar{H}^{(c)}$  разбиваются лучом  $z = ku$  на три класса: 1) принадлежащие лучу; преобразование  $\bar{E}^-$  не изменяет их расстояние до плоскости  $u = 0$ ; 2) точки, для которых  $z < ku$ ; преобразование  $\bar{E}^-$  приближает их к плоскости  $u = 0$ ; 3) точки, для которых  $z > ku$ ; преобразование  $\bar{E}^-$  удаляет их от плоскости  $u = 0$ . Если  $k > 0$ , то луч  $z = ku$  пересекает кривую  $\Gamma$  (возможна только одна точка пересечения). Пусть точка пересечения  $P$  принадлежит  $\bar{H}^{(c)}$  (так всегда будет для достаточно малых  $k$  или  $\psi_0$ ). Из определения  $k$  следует, что  $P$  будет инвариантной относительно преобразования  $T^* = \bar{E}^- S_0^- \bar{E}^+ S_0^+$ . Каждую точку  $\bar{H}^{(c)}$ , взятую на кривой  $\Gamma$ , преобразование  $T^*$  переводит в точку, также принадлежащую  $\Gamma$  и расположенную ближе к  $P$ .

При итерации преобразования  $T^*$  последовательность точек на  $\Gamma$  сходится к точке  $P$ . Всякую другую точку  $\bar{H}^{(c)}$  преобразование  $T^*$  переводит в точку на кривой  $\Gamma$ .

Таким образом, инвариантная точка устойчива, а отрезок покоя неустойчив. Соответствующее устойчивое периодическое движение составляется из кусков фазовых траекторий, принадлежащих пластинкам  $\sigma$  и  $\sigma'$ , и траекторий между плоскостями  $\psi = \psi_0$  и  $\psi = -\psi_0$ . Если  $k < 0$ , то луч  $z = ku$  не пересекает кривую  $\Gamma$ ; тогда преобразование  $T^*$  всякую точку  $\bar{H}^{(c)}$  приближает к отрезку покоя. При итерации преобразования последовательность точек сходится к концу отрезка покоя. Отрезок покоя в этом случае устойчив. Если  $k = 0$ , то луч  $z = ku$  касается кривой  $\Gamma$ . Полагая в (6) и (7)  $k = 0$ , находим значения  $A$  и  $B$ , при которых отрезок покоя меняет устойчивость и из отрезка покоя появляется устойчивое периодическое движение (кривая  $D$  на рисунке).

4. Количественные характеристики исследуемого периодического движения могут быть легко вычислены. Период  $\tau^* = 2(\tau_0 + \tau_1)$ , где  $\tau_0$  и  $\tau_1$  — соответственно время движения между плоскостями  $\psi = \psi_0$  и  $\psi = -\psi_0$  и по пластинкам  $\sigma$  и  $\sigma'$ , можно представить в виде:

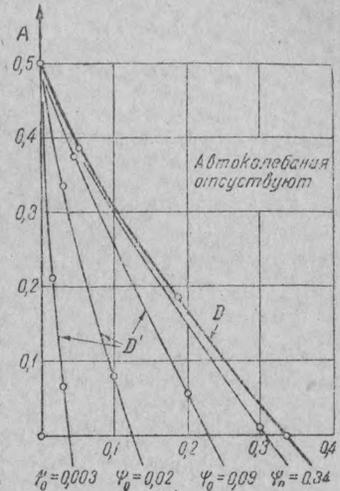
$$\tau^* = \frac{2}{A+B} \ln \frac{(A-1) [(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1]}{B [(1-A)k]^{A+B}},$$

где  $k$  определяется из (6) или (7).  $\tau^*$  неограниченно возрастает, когда периодическое решение стягивается к отрезку покоя ( $k \rightarrow 0$ ).

5. Точка  $P$  пересечения луча  $z = ku$  и кривой  $\Gamma$  принадлежит периодическому решению (инвариантна относительно  $T^* = \bar{E}^- S_0^- \bar{E}^+ S_0^+$ ), пока она лежит в  $\bar{H}^{(c)}$ . Если  $P$  выходит из куска  $\bar{H}^{(c)}$ , то в состав периодического движения входят куски траекторий, лежащих в цилиндрических поверхностях  $z = ce^u - 1$  и  $z = ce^{-u} + 1$ . Этому

периодическому движению отвечает на плоскости  $\psi = \psi_0$  точка  $P'$ , инвариантная относительно  $T' = S^- \bar{E}^- S_0^- S^+ \bar{E}^+ S_0^+$  или  $T'' = E^- S^- \bar{E}^- S_0^- E^+ S^+ \bar{E}^+ S_0^+$ . Кривые  $D'$  (см. рисунок), вычисленные из условия, что  $P$  лежит на границе  $\bar{H}^{(e)}$ , дают при фиксированном  $\psi_0$  на плоскости  $A, B$  границу периодических решений, не содержащих и содержащих куски траекторий в цилиндрических поверхностях.

6. Результаты настоящей работы, касающиеся возникновения автоколебаний, обусловленных зоной нечувствительности, представлены на рисунке. Если  $A = M\beta$  и  $B = M^2/Na$  достаточно велики, то автоколебаний не будет и будет иметь место безразличное (в отношении  $\psi$ ) положение равновесия внутри зоны нечувствительности. Если уменьшать  $A$  и  $B$  таким образом, что точка, представляющая систему на плоскости параметров  $A, B$ , пересечет кривую  $D$  по направлению к началу координат, то в зоне нечувствительности возникнут автоколебания. Кривая  $D$  является границей возникновения автоколебаний, не выходящих за пределы зоны нечувствительности. Эта граница не зависит от  $\psi_0$ . Зададимся теперь  $\psi_0$ . Если при дальнейшем изменении  $A$  и  $B$  точка на плоскости параметров пересечет кривую  $D'$  (соответствующую выбранному  $\psi_0$ ), то автоколебания начнут выходить за зону нечувствительности. Кривая  $D'$  является границей возникновения автоколебаний, выходящих за зону нечувствительности. Кривая  $D$  и семейство кривых  $D'$  наглядно показывают роль искусственного демпфирования  $\beta$  в качестве фактора подавления автоколебаний. Однако, и при  $\beta = 0$  автоколебания могут быть устранены выбором достаточно малого  $a$ .



Физико-технический институт  
Горьковского государственного университета  
и Горьковский институт инженеров  
водного транспорта

Поступило  
31 V 1944

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. Андронов и Н. Баутин, ДАН, XLIII, № 5 (1944). <sup>2</sup> В. А. Котельников, Продольная устойчивость самолета с автопилотом АВП 12, М., 1941.  
<sup>3</sup> Н. В. Бугенин, Труды ЛВВКА, 3, 191 (1943). <sup>4</sup> Б. В. Булгаков, Прикладная математика и механика, VII, 97 (1943).