

Ф. Б. ЧЕРНЫИ

АПЕРИОДИЧЕСКОЕ НАМАГНИЧЕНИЕ ШАРА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 23 IX 1946)

Введение. В настоящей работе рассматривается процесс возникновения намагничности шара при внезапном появлении постоянного однородного магнитного поля и исчезновения намагничности при внезапном исчезновении поля. В результате мы получаем годные для практики формулы для вычисления проникновения поля в шар как для больших, так и для малых значений времени t .

В последнем случае формула скин-эффекта совпадает с формулой элементарного скин-эффекта (1), отличаясь от нее, в согласии с теорией, коэффициентом $3/2$.

Постановка задачи. Пусть в пространстве, где помещен однородный шар радиуса R с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ (μ не зависит от поля), мгновенно появляется однородное постоянное магнитное поле \vec{H}_0 . Требуется определить характер и время установления стационарного режима.

Полагаем, что имеют место уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{внутри шара } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}, \\ \text{вне шара } \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Начальное условие внутри и вне шара

$$\text{при } t = 0 \quad \vec{H} = 0; \quad (2)$$

граничное условие в бесконечности

$$\text{при } t > 0 \quad \vec{H} = \vec{H}_0. \quad (3)$$

Метод решения. Наиболее просто задача решается методами операционного исчисления, терминами и формулами которого мы в дальнейшем и будем пользоваться без доказательств. Все применяемые здесь формулы и их доказательства приведены в книгах (2,3). Уравнения (1) можно написать так:

$$\left. \begin{array}{l} \text{внутри шара } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} p \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}; \\ \text{вне шара } \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \end{array} \right\} \quad (4)$$

где вместо $\partial/\partial t$ поставлен оператор Хевисайда p , а искомые величины

\vec{E} и \vec{H} являются теперь функциями только координат p . Мы перешли таким образом от соотношений (1) между начальными функциями $\vec{H}(q, t)$ и $\vec{E}(q, t)$ к соотношениям (4) между изображениями $\vec{H}(q, p)$ и $\vec{E}(q, p)$ (q — совокупность координат). Решив уравнения (4) и удовлетворив граничным условиям в бесконечности и на поверхности шара, мы определим изображения $\vec{H}(q, p)$ и $\vec{E}(q, p)$. Переходя от изображений к их начальным функциям по формулам операционного исчисления ⁽²⁾, находим в полярных координатах r, θ, φ следующее решение задачи:

внутри шара:

$$\begin{aligned} H_r &= 3 H_0 \cos \theta \left\{ \frac{1}{\mu+2} + \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\mu/2}(\xi_k) e^{p_k t}}{A_k} \right\}, \\ H_\theta &= -3 H_0 \sin \theta \left\{ \frac{1}{\mu+2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\xi_k J_{\mu/2}(\xi_k) - J_{\mu/2}(\xi_k)] e^{p_k t}}{A_k} \right\}, \\ E_\varphi &= -\frac{3}{2} H_0 \frac{\mu}{c} \sin \theta \frac{R^{\mu/2}}{r^{\mu/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k J_{\mu/2}(\xi_k) e^{p_k t}}{A_k}; \end{aligned} \quad (5)$$

вне шара:

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 \cos \theta \left\{ 1 + \frac{2 R^3}{r^3} \frac{\mu-1}{\mu+2} + \frac{R^3}{r^3} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \right\}, \\ H_\theta &= -H_0 \sin \theta \left\{ 1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu-1}{\mu+2} - \frac{R^3}{2 r^3} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi_k = r \sqrt{-\frac{4 \pi \mu \sigma p_k}{c^2}}, \quad p_k = -\frac{c^2 x_k^2}{4 \pi \mu \sigma R^2},$

x_k — корни уравнения ⁽²⁾, стр. 101) $(\mu-1) J_{\mu/2}(x) + x J_{\mu/2}(x) = 0$, $J_{n+1/2}$ — функции Бесселя $n+1/2$ -го порядка,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\mu+1}{2} x_k J_{\mu/2}(x_k) - \left(\frac{3\mu-3}{2} + x_k^2 \right) J_{\mu/2}(x_k) \right], \\ B_k &= \frac{(2\mu+1) J_{\mu/2}(x_k) - x_k J_{\mu/2}(x_k) e^{p_k t}}{A_k}. \end{aligned}$$

При внезапном исчезновении внешнего поля решение может быть получено, если в выражениях (5) и (6) отбросить слагаемые, не зависящие от времени, и в полученных таким образом выражениях переменить знаки на обратные.

Для проверки опытным путем полученных результатов важно знать полный поток индукции Ψ , пронизывающий экваториальное сечение шара в любой момент времени. Измерение этого потока можно осуществить баллистическим методом с помощью маятника Гельмгольца.

$$\Psi(t) = \mu \int_0^R H_\theta 2 \pi r dr = -3 \mu H_0 \pi R^2 \left\{ \frac{1}{\mu+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\mu/2}(x_k) e^{p_k t}}{A_k} \right\}. \quad (7)$$

Для практических целей решениями (5) и (6) удобно пользоваться при не очень малых t , т. е. когда

$$t > \frac{4 \pi \mu \sigma R^2}{c^2}$$

При меньших значениях ряды сходятся медленно и решениями (5) и (6) пользоваться неудобно.

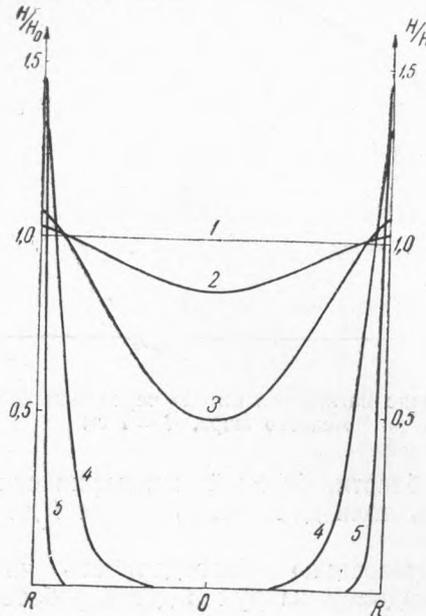


Рис. 1. Проникание поля в медный шар (экваториальное сечение): 1 — $t = \infty$, 2 — $t = 2 \cdot 10^{-3}$ сек., 3 — $t = 10^{-3}$ сек., 4 — $t = 10^{-4}$ сек., 5 — $t = 10^{-5}$ сек.

Применив асимптотическое разложение ((2), стр. 93 и 99) к решениям уравнений (4) для больших p , что соответствует малым значениям времени t начальных функций, и перейдя к последним, получаем решение задачи для малых t .

Мы ограничимся приведением решения лишь для H_0 внутри шара. Итак, для малых t и $\mu \neq 1$ имеем (2):

$$H_0 = -\frac{3}{2} H_0 \sin \theta \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{\mu-1} \left\{ \left[(\mu-1) \frac{r}{R} + 1 \right] e^{\frac{(\mu-1)(R-r)}{R} + \left(\frac{\mu-1}{\lambda R}\right)^2 t} \times \right. \\ \left. \times F \left[\frac{\lambda(R-r)}{2\sqrt{t}} + \frac{\mu-1}{\lambda R} \sqrt{t} \right] - F \left[\frac{\lambda(R-r)}{2\sqrt{t}} \right] \right\}, \quad (8)$$

где

$$F(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2} dz, \quad \lambda = \sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}},$$

для $\mu = 1$

$$H_0 = -\frac{3}{2} H_0 \sin \theta \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left\{ F \left[\frac{\lambda(R-r)}{2\sqrt{t}} \right] - \frac{2}{\lambda R} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2(R-r)^2}{4t}} \right\}. \quad (9)$$

Из последнего выражения следует, что при $R \rightarrow \infty$ и при $z = R - r$

$$H_0 \rightarrow -\frac{3}{2} H_0 F \left(\frac{\lambda z}{2\sqrt{t}} \right),$$

что совпадает с выражением для элементарного скин-эффекта ⁽¹⁾ с точностью до коэффициента.

Полученные формулы (8) и (9) справедливы для $r \neq 0$ и не близких к нулю значений r , но в начальные моменты времени весь про-

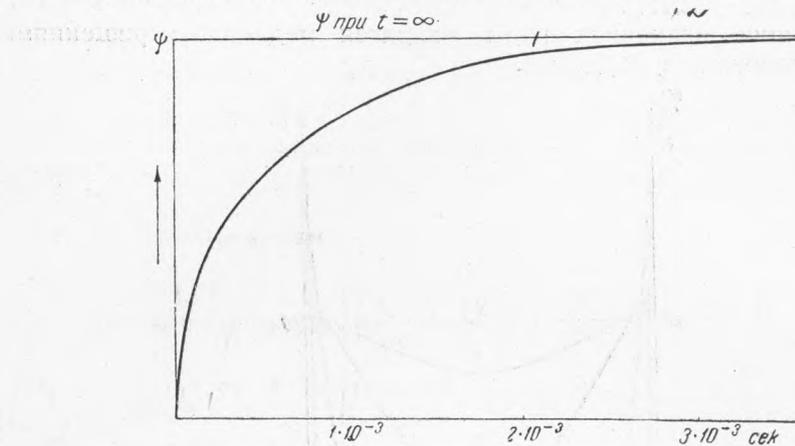


Рис. 2. Нарастание магнитного потока через экваториальное сечение медного шара, $R = 1$ см

цесс происходит в области, близкой к поверхности шара, и нет необходимости вычислять поля для очень малых t для области, близкой к центру шара.

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН СССР В. К. Аркадьеву за руководство работой.

Поступило
13 VI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. К. Аркадьев, ДАН, **41**, 2, 67 (1943). ² А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, 1937. ³ Н. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford, 1941. ⁴ М. Дивильковский, ЖТФ, **9**, 5, 433 (1939).