Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 4

МАТЕМАТИКА

З. Я. ШАПИРО

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 30 IV 1944)

Мы рассматриваем системы уравнений с частными производными вида

$$\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{3} a_{ij}^{k}\frac{\partial u^{j}}{\partial x_{k}}=0, \tag{1}$$

или, в матричной форме,

$$A_1\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_2}+A_3\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_3}=0, \tag{1'}$$

где A_k — постоянная матрица порядка $2n$, а $\vec{U}(x_1, x_2, x_3)$ — $2n$-мерный вектор.

Такая система называется эллиптической, если форма порядка $2n$ относительно переменных s^1, s^2, s^3, заданная в виде детерминанта

$$Q(s^1, s^2, s^3)=|s^1A_1+s^2A_2+s^3A_3|, \tag{2}$$

является положительно определенной.

Цель настоящей заметки — постановка граничной задачи для эллиптической системы вида (1) и конструкция фундаментальных решений этой системы в виде абелевых интегралов.

Обозначим компоненты вектора $\vec{U}(x_1, x_2, x_3)$, дающего решение, через $u^1, u^2, \ldots, u^{2n}$.

Существует решение системы (1), *определенное в полупространстве* $x_3>0$ *и такое, что при* $x_3\to 0$ n *произвольных независимых линейных форм от* $u^1, u^2, \ldots, u^{2n}$ *стремятся к заданным в плоскости* (x_1, x_2) *произвольным непрерывным функциям* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *ограниченным на бесконечности.*

1. Рассмотрим кривую $Q(s^1, s^2, s^3)=0$ и точку с координатами s_0^1, s_0^2, s_0^3 на этой кривой. Если $\vec{U}_0(s_0^1, s_0^2, s_0^3)$ — вектор, аннулируемый матрицей $\|s_0^1A_1+s_0^2A_2+s_0^3A_3\|$, то вектор $\Phi\left(\sum_{k=1}^{s} s_0^k x_k\right)\vec{U}_0(s_0^1, s_0^2, s_0^3)$ при произвольной скалярной дифференцируемой функции $\Phi(t)$ представляет собой элементарное решение системы (1).

Положим $\Phi(t)=1/t^2$. Тогда каждому вещественному значению s^1, s^2 соответствует $2n$ комплексных попарно сопряженных элементарных решения

$$\vec{U}_1,\ \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n,\ \overline{\vec{U}}_1,\ \overline{\vec{U}}_2, \ldots, \overline{\vec{U}}_n. \qquad (3)$$

Без ограничения общности можно сначала допустить, что линейные формы, значения которых в плоскости (x_1, x_2) задаются, совпадают с первыми n функциями $u^1, u^2, \ldots, u^n$, причем $f_k \neq 0$ только для $k=1$.

Вообще говоря *, при каждом s^1/s^2 можно выбрать вещественную линейную комбинацию векторов (3), для которой при $x_s \to 0$

$$u^1 \to \frac{1}{s^1x_1 + s^2x_2},\ u^2,\ u^3, \ldots, u^n \to 0.$$

Интеграл от этой комбинации по всем вещественным значениям отношения s^2/s^1 есть абелев интеграл по замкнутому циклу Г на римановой поверхности подинтегральной функции, который мы назовем **фундаментальным решением** для поставленной выше граничной задачи.

Обозначая s^2/s^1 через s, s^3/s^1 через t, а коэффициенты выбранной вещественной комбинации через $c_\nu(s)$, имеем формулу для фундаментальных решений

$$\vec{U}_\Phi(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{c_\nu(s)}{(x_1 + sx_2 + t_\nu x_3)^2} \vec{U}_\nu(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{c}_\nu(s)}{(x_1 + sx_2 + \overline{t}_\nu x_3)^2} \overline{\vec{U}}_\nu(s) \right\} ds. \qquad (4)$$

2. Заменяя цикл Г гомологичной ему комбинацией C циклов γ_e надлежащим образом выбранного базиса гомологий $\left(C = \sum\limits_e \alpha_e \gamma_e \sim \Gamma\right)$, а интеграл по Г интегралом по C и суммой вычетов подинтегральной функции относительно полюсов, лежащих в области с границей $C - \Gamma$, мы устанавливаем следующие свойства фундаментального решения при $x_3 \to 0$.

Положим $x_1 = x - \xi$, $x_2 = y - \eta$, $x_3 = z$, $R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$.

I. Первые n функций фундаментального решения $u^j_\Phi(x-\xi, y-\eta, z)$ представим в виде $\frac{z}{R^2} H^j\left(\frac{x-\xi}{R}, \frac{y-\eta}{R}, \frac{z}{R}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, где H^j — непрерывные и ограниченные функции своих аргументов при $z/R \geqslant 0$. Отсюда следует абсолютная интегрируемость $u^j_\Phi(x-\xi, y-\eta, z)$ по ξ и η при $z \neq 0$.

II. Положим

$$\left.\begin{aligned} J_\mu(z) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^\mu_\Phi(x-\xi,\ y-\eta,\ z)\, d\xi\, d\eta, \\ J^G_\mu(z) &= \iint\limits_G u^\mu_\Phi(x-\xi,\ y-\eta,\ z)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

* Если это не имеет места для плоскости $x_3 = 0$, то имеет место для сколь угодно близких плоскостей. Решая задачу для близкой области с помощью линейного преобразования независимых переменных и переходя к пределу, мы получаем решение для полупространства $x_3 > 0$.

Легко убедиться, что

$$J_\mu(z) = \text{const} = J_\mu = \begin{cases} 4\pi^2 & \text{при } \mu = 1, \\ 0 & \text{»} \quad \mu = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

$$\lim_{z \to 0} J_\mu^{\Delta_0}(z) = J_\mu, \text{ где } \Delta_0 = \begin{cases} |x - \xi| \leqslant a, \\ |y - \eta| \leqslant b. \end{cases}$$

$$\lim J_\mu^{\Delta}(z) = 0,$$

где Δ—или дополнение области вида Δ_0 до всей плоскости (ξ, η), или конечная область, не содержащая точки (x, y).

3. Обозначим $\frac{1}{4\pi^2} u_\Phi^j = R_{j1}$ (индекс 1 указывает на специфический характер граничных значений) и рассмотрим матрицу $R_{j\nu}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Положим теперь:

для $j \leqslant n$

$$u^j(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{j\nu}(x - \xi, y - \eta, z) f_\nu(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{5}$$

для $n < j \leqslant 2n$

$$\frac{\partial u^j(x, y, z)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R_{j\nu}(x - \xi, y - \eta, z)}{\partial x} f_\nu(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{6}$$

и аналогично для двух других производных.

Свойство I фундаментального решения обеспечивает существование интегралов (5). Существование интегралов (6) при $z \neq 0$ очевидно.

Свойство II обеспечивает выполнение граничных условий

$$\lim_{z \to 0} u^\nu(x, y, z) = f_\nu(x, y) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, формулы (5) и (6) полностью решают поставленную выше граничную задачу для полупространства.

4. Пусть теперь в пространстве независимых переменных x, y, z задана ограниченная выпуклая область D с гладкой границей S. Поставим задачу: определить вектор $\vec{U}(x, y, z)$, дающий решение системы (1) в D и такой, что на S первые n компонент обращаются в заданные функции.

Пусть P означает внутреннюю точку области D, Q—ее граничную точку, $T(Q)$—плоскость, касательную к S в точке Q. Зафиксировав Q, мы можем построить матрицу фундаментальных решений, отвечающих полупространству с границей $T(Q)$, содержащему область D.

Обозначим элементы этой матрицы $R_{j\nu}^{T(Q)}(P, Q')$, где $Q' \subset T(Q)$, $P \subset D$. В частности, Q' может совпасть с Q, и при этом условии фундаментальные решения становятся функциями двух точек $P \subset D$, $Q \subset S$, $R_{j\nu}^{T(Q)}(P, Q)$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$u^j(P) = \sum_{\nu=1}^{n} \iint_S R_{j\nu}^{T(Q)}(P, Q)\, \mu_\nu(Q)\, d\sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{7}$$

Нетрудно установить, что функции $u_j(P)$, определенные формулой (7), при стремлении P к точке $Q_0 \in S$ стремятся к

$$\sum_{\nu=1}^{n} \iint_S R_{j\nu}^{T(Q)}(Q_0,\ Q)\, \mu_\nu(Q)\, d\sigma + \delta_j^\nu \mu_\nu(Q_0)$$

и, следовательно, будут решением поставленной граничной задачи, если $\mu_\nu(Q)$ определены из системы интегральных уравнений Фредгольма

$$\sum_{\nu=1}^{n} \iint_S R_{\mu\nu}^{T(Q)}(Q_0,\ Q)\, \mu_\nu(Q)\, d\sigma + \delta_\mu^\nu \mu_\nu(Q_0) = f_\mu(Q_0) \qquad (\mu = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Поступило
30 IV 1944