Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. ЧОГОШВИЛИ

О СООТНОШЕНИЯХ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 V 1944)

1. Пусть R — нормальное пространство, M — некоторое его подпространство. В случае, когда M — открытое или замкнутое множество в R, его r-мерная (внутренняя) ∇-группа гомологии $\nabla^r(M)$ определяется* как предельная группа прямого спектра $\{\Delta^r(K_\alpha - C_\alpha)\pi_\beta^\alpha\}$, где K_α есть нерв конечного, открытого покрытия O_α подпространства M, C_α — особый подкомплекс K_α, а $\nabla^r(K_\alpha - C_\alpha)$ обозначает r-мерную ∇-группу Бетти $B_\nabla^r(K_\alpha - C_\alpha)$ при дискретном поле коэффициентов.

Ниже, прежде всего, даются определения двух групп для M в общем случае, когда M — произвольное подпространство R.

Рассмотрим совокупность $\{F_a\}$ всех замкнутых в R множеств F_a, содержащихся в M. В системе $\{\nabla^r(F_a)\}$ положим $\nabla^r(F_a) < \nabla^r(F_b)$, если $F_a \subset F_b$. Этим $\{\nabla^r(F_a)\}$ становится неограниченной частично-упорядоченной системой. В случае когда $\nabla^r(F_a) < \nabla^r(F_b)$, определим гомоморфное отображение p_a^b группы $\nabla^r(F_b)$ в группу $\nabla^r(F_a)$ следующим образом. Возьмем произвольный пучок $h_b = \{h_{b\beta}\}$ группы $\nabla^r(F_b)$, любой элемент $h_{b\beta}$ этого пучка и какой-либо цикл $z_{b\beta} \subset Z_\nabla^r(K_{b\beta} - C_{b\beta})$ взятого класса $h_{b\beta}$. Покрытие $O_{b\beta}$ множества F_b, нервом которого является $K_{b\beta}$, индуцирует в смысле ([1]), стр. 35, покрытие $O_{a^\alpha} = F_a \cdot O_{b\beta}$ множества F_a. Рассматривая K_{a^α} как подкомплекс комплекса $K_{b\beta}$, возьмем цепь z_{a^α} комплекса K_{a^α}, равную $z_{b\beta}$ на K_{a^α}. Имеем $z_{a^\alpha} \subset Z_\nabla^r(K_{a^\alpha} - C_{a^\alpha})$. Пусть h_{a^α} есть тот класс гомологии из $\nabla^r(K_{a^\alpha} - C_{a^\alpha})$, который содержит цикл z_{a^α}, а h_a — пучок спектра $\{\nabla^r(K_{a^\alpha} - C_{a^\alpha}), \pi^{a\alpha}_{a\beta}\}$, содержащий h_{a^α}. Данное определение h_a не зависит ни от выбора цикла $z_{b\beta}$ из $h_{b\beta}$, ни от выбора $h_{b\beta}$ из $h_b = \{h_{b\beta}\}$. Мы вправе, следовательно, пучок h_a привести в соответствие пучку h_b, что и определит искомый гомоморфизм p_a^b. Введенные гомоморфизмы удовлетворяют условию: $p_a^b p_b^c = p_a^c$, так что группы $\nabla^r(F_a)$ с гомоморфизмами p_a^b образуют обратный спектр $\{\nabla^r(F_a), p_a^b\}$. Предельная группа $\nabla_F^r(M)$ этого спектра определяется обычным образом (см. ([1]), стр. 20), только топологизируется она

* Об этом, как и о других понятиях и обозначениях, не определенных здесь, см. ([1])

дискретно (окрестностью нити $\{h_a\}$ называется множество нитей $\{h_a'\}$, удовлетворяющих условию $h_a' \subset U_a$, где U_a — данные окрестности всех координат h_a нити $\{h_a\}$). Группу $\nabla^r_F(M)$ назовем r-мерной замкнутой ∇-группой гомологии подпространства M в пространстве R. Если R — бикомпактное пространство, то $\nabla_F{}^r(M)$ является топологическим вариантом M. Если M замкнуто в R, то $\nabla_F{}^r(M)$ изоморфна с $\nabla^r(M)$.

2. Пусть $\{G_a\}$ — совокупность всех открытых в R множеств, содержащих множество M. Внося в соответствующей совокупности $\{\nabla^r(G_a)\}$ порядок $\nabla^r(G_a) < \nabla^r(G_b)$, если $G_a \supset G_b$, видим, что $\{\nabla^r(G_a)\}$ есть неограниченная частично-упорядоченная система. Если $\nabla^r(G_a) < \nabla^r(G_b)$, определим гомоморфизм $q_a{}^b$ группы $\nabla^r(G_b)$ в группу $\nabla^r(G_a)$ таким образом. Возьмем произвольный пучок $h_b = \{h_{b\beta}\}$ из $\nabla^r(G_b)$, какой-либо элемент $h_{b\beta}$ и h_b и некоторый цикл $z_{b\beta}$ из класса $h_{b\beta}$: $z_{b\beta} \subset Z_\nabla{}^r(K_{b\beta} - C_{b\beta})$. Пусть покрытие $O_{b\beta}$ открытого множества G_b (нервом которого является $K_{b\beta}$) индуцируется на G_b, в смысле ([1]), стр. 44, некоторым покрытием $O_{a\alpha}$ множества G_a: $O_b = G_b \cdot O_{a\alpha}$. Рассмотрим $K_{b\beta}$ как подкомплекс нерва $K_{a\alpha}$ покрытия $O_{a\alpha}$ и возьмем цепь $z_{a\alpha}$ комплекса $K_{a\alpha}$, равную $z_{b\beta}$ на симплексах $K_{a\alpha}$, принадлежащих $K_{b\beta}$, и равную нулю на прочих. $z_{a\alpha}$ есть ∇-цикл на $K_{a\alpha}$, лежащий на $K_{a\alpha} - C_{a\alpha}$. Пусть $h_{a\alpha}$ есть класс гомологии из $\nabla^r(K_{a\alpha} - C_{a\alpha})$, содержащий $z_{a\alpha}$, а h_a тот пучок группы $\nabla^r(G_a)$, который содержит $h_{a\alpha}$. Способ, по которому, исходя из $h_b = \{h_{b\beta}\}$, мы получили h_a, не зависит ни от выбора того или иного покрытия $O_{a\alpha}$, индуцирующего на G_b покрытие $O_{b\beta}$, ни от выбора $z_{b\beta}$ из $h_{b\beta}$ или $h_{b\beta}$ из h_b. Отображая h_b на h_a, мы, в силу сохранения операции сложения пучков этим отображением, получаем определенный гомоморфизм группы $\nabla^r(G_b)$ в $\nabla^r(G_a)$, который и принимаем за $q_a{}^b$. Если $\nabla^r(G_a) < \nabla^r(G_b) < \nabla^r(G_c)$, то $q_a{}^b q_b{}^c h_c = q_a{}^c h_c$ для всякого $h_c \subset \nabla^r(G_c)$. Таким образом получаем обратный спектр $\{\nabla^r(G_a), q_a{}^b\}$, предельную группу $\nabla_G{}^r(M)$ которого называем r-мерной открытой ∇-группой гомологии множества M в R. Если M—открытое множество в R, то $\nabla_G{}^r(M)$ изоморфна в $\Delta^r(M)$.

3. Пусть R — нормальное, локально-бикомпактное пространство, односвязное относительно размерностей r и $r+1$ (см. ([1]), стр. 42), M — произвольное подмножество R. Если $\{F_a\}$ — система замкнутых в R множеств, содержащихся в M, то $\{G_a\}$, где $G_a = R - F_a$, есть система открытых в R множеств, содержащих $R - M$. Рассмотрим спектры: $\{\nabla^r(F_a), p_a{}^b\}$ и $\{\nabla^{r+1}(G_a), q_a{}^b\}$. В силу закона двойственности Колмогорова (см. ([1]), стр. 43) группы $\nabla^r(F_a)$ и $\nabla^{r+1}(G_a)$ изоморфны. Обозначим этот изоморфизм через s_a. Доказываются равенства $s_a p_a{}^b = q_a{}^b s_b$ и $s_a^{-1} q_a{}^b = p_a{}^b s_b^{-1}$. Из этого вытекает изоморфизм предельных групп предыдущих спектров, т. е. изоморфизм r-мерной замкнутой группы гомологии множества M с $(r+1)$-мерной открытой группой гомологии дополнительного множества $R - M$: $\nabla_F{}^r(M) \cong \nabla_G{}^{r+1}(R - M)$. Ясно, что в случае, когда M — замкнутое множество, этот изоморфизм дает закон двойственности Колмогорова.

4. Гомоморфизмы p_a^b, определенные выше, имеют место, когда отображаемая группа есть группа гомологии не только замкнутого (как выше), но и открытого множества. Это позволяет гомоморфно отобразить группу $\nabla_G{}^r(M)$ в группу $\nabla_F{}^r(M)$. Именно, пусть $h_G = \{h_{G_a}\}$ есть элемент из $\nabla_G{}^r(M)$, где $h_{G_a} \subset \nabla^r(G_a)$, а открытое множество $G_a \supset M$. Для каждого замкнутого множества $F_l \subset M$ гомоморфизм $p_l{}^a$ группы $\nabla^r(G_a)$ в $\nabla^r(F_l)$ определит элемент $p_l^a h_{G_a} = h_{F_l}$ группы $\nabla^r(F_l)$. Совокупность таких h_{F_l}, по одному из каждого $\nabla^r(F_l)$, образует нить $\{h_{F_l}\} = h_F$ группы $\nabla_F{}^r(M)$. Этим $\nabla^r(G_a)$ гомоморфно отображается в $\nabla_F{}^r(M)$ при любом a. Другая координата h_{G_b} нити h_G отобразится на ту же нить h_F. Следовательно, приводя в соответствие нити h_G нить h_F, получаем искомое гомоморфное отображение группы $\nabla_G{}^r(M)$ в $\nabla_F{}^r(M)$.

Из изоморфизма $\nabla_F{}^r(M) \cong \nabla_G{}^{r+1}(R-M)$ и из гомоморфизма $\nabla_G{}^{r+1}(R-M)$ в $\nabla_F{}^{r+1}(R-M)$ следует определенное гомоморфное отображение t группы $\nabla_F{}^r(M)$ в группу $\nabla_F{}^{r+1}(R-M)$. Пусть $\nabla_{FO}{}^r(M)$ есть ядро гомоморфизма t, ${}_*\nabla_F{}^r(M)$ — фактор-группа группы $\nabla_F{}^r(M)$ по $\nabla_{FO}{}^r(M)$, а $\nabla_{*F}{}^{r+1}(R-M)$—образ группы $\nabla_F{}^r(M)$ в группе $\nabla_F{}^{r+1}(R-M)$ при t. Тогда имеем изоморфизм ${}_*\nabla_F{}^r(M) \cong \nabla_{*F}{}^{r+1}(R-M)$. Группы ${}_*\nabla_F{}^r(M)$ и $\nabla_{*F}{}^r(M)$ определимы и непосредственно, независимо от гомоморфизма t.

Математический институт
Академии Наук Грузинской ССР

Поступило
11 V 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Ученые записки МГУ, вып. 45 (1940).