Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 3

МАТЕМАТИКА

А. П. НОРДЕН

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА БИАКСИАЛЬНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VII 1946)

В настоящей заметке мы ставим своей задачей построение геометрии, фундаментальная группа которой изоморфна подгруппе проективных преобразований, переводящих в себя линейную конгруенцию эллиптического типа. Мы будем называть ее геометрией пространства K.

Рассматриваемая группа вполне характеризуется тем, что она переводит в себя две мнимо сопряженные оси конгруенции или абсолютные прямые пространства и является, таким образом, частным случаем так называемой биаксиальной группы ([1]).

Будем называть: прямую пространства K изотропной, если она пересекает одну абсолютную прямую, и несобственной, если она пересекает обе эти прямые. Изотропные прямые мнимы, а несобственные прямые образуют действительную линейную конгруенцию, так что через каждую действительную точку проходит одна и в каждой действительной плоскости лежит одна такая прямая.

В дальнейшем, говоря о точках и плоскостях, мы будем предполагать, что они действительны, а о прямых, кроме того, что они не являются несобственными, если противоположное не оговорено прямо.

Пучок линейных комплексов, содержащих конгруенцию несобственных прямых, мы будем называть абсолютным пучком; всякая прямая принадлежит определенному комплексу абсолютного пучка.

Две прямые, принадлежащие одному комплексу абсолютного пучка, мы будем называть параллельными между собой: через всякую точку проходят прямые, параллельные данной, образуя пучок, содержащий несобственную прямую.

Комплексы абсолютного пучка образуют проективное многообразие первой ступени, содержащее в числе своих элементов два мнимо сопряженных специальных изотропных комплекса. Эти элементы могут быть приняты за базис эллиптической метрики, после чего всяким двум комплексам будет отнесен инвариант, который мы назовем углом между прямыми, принадлежащими этим комплексам; согласно этому определению, угол между параллельными прямыми равен нулю.

Приняв точки пересечения плоскости с абсолютными прямыми за циклические точки евклидовой метрики этой плоскости, мы легко убеждаемся в том, что понятия угла и параллелизма для прямых, принадлежащих плоскости, совпадают с теми, которые были введены в общем случае.

Мы назовем сфероидом линейчатую поверхность, образованную всеми несобственными прямыми, пересекающими данную прямую. Сфероид есть поверхность второго порядка, так как его несобственные образующие пересекают, кроме данной прямой, обе абсолютные прямые, которые принадлежат ко второй системе образующих. Всякое плоское сечение сфероида, очевидно, проходит через циклические точки и, следовательно, либо будет окружностью, либо распадется на две прямые, из которых одна—несобственная.

Считая соответствующими точки, принадлежащие одной несобственной прямой, мы приходим к понятию абсолютного соответствия между двумя поверхностями, характер которого вполне выясняется при рассмотрении двух плоскостей, так как при этом окружности или прямой соответствует плоское сечение сфероида, т. е. опять-таки окружность или прямая. Отсюда следует, что абсолютное соответствие будет конформным, круговым для двух плоскостей и общего вида для произвольных поверхностей.

Рассмотрим поверхность и некоторую область точек на ней, предположив, что в этой области несобственные прямые не касаются этой поверхности. В этой области через каждую точку поверхности проходит несобственная прямая, не лежащая в касательной плоскости, а в этой плоскости лежит такая же прямая, не проходящая через точку прикосновения, и, следовательно, поверхность оказывается нормализованной.

Нами было показано ([2]), что на нормализованной поверхности единственным образом определяется аффинная связность без кручения, которую мы назвали внутренней. Для поверхности пространства K, которая нормализована несобственными прямыми, направление вектора, переносящегося параллельно по отношению к внутренней связности, совпадает с направлением прямой, остающейся параллельной самой себе по отношению ко внешнему пространству.

Но в каждой точке рассматриваемой области можно провести только одну прямую, которая параллельна данной и одновременно лежит в касательной плоскости, откуда следует, что параллелизм направлений, принадлежащих поверхности, не зависит от пути.

Единственная связность, допускающая абсолютный параллелизм направлений, была рассмотрена нами в работе ([3]) и названа квазиевклидовой; таким образом, внутреняя связность поверхности пространства K квазиевклидова.

Квазиевклидова связность является частным случаем связности Вейля, но характеризуется тем, что мера угла, сохраняющегося при параллельном перенесении, может быть введена бесчисленным множеством способов. Во внутренней связности поверхностей пространства K одна из этих угловых мер совпадает с мерой, определенной геометрией пространства.

Изотропная сеть внутренней метрики Вейля образована двумя семействами мнимо сопряженных кривых, по которым поверхность пересекается изотропными плоскостями, т. е. плоскостями, проходящими через абсолютные прямые. Эта же сеть соответствует развертывающимся поверхностям нормализующих конгруенций, сводящимися к тем же плоскостям.

Из теории нормализованных поверхностей следует, что внутренние геометрии поверхности будут эквиаффинными тогда и только тогда, если сети, соответствующие развертывающим поверхностям нормализующих конгруенций, будут сопряженными ([4]).

Если изотропная сеть сопряжена, то она является двойной сетью Кенигса ([5]), так как каждая ее линия лежит в изотропной плоскости и на конической поверхности, составленной из изотропных касательных.

Мы будем называть эти поверхности с сопряженной изотропной сетью **поверхностями нулевой кривизны**, так как их внутренняя геометрия, будучи одновременно квазиевклидовой и эквиаффинной, будет евклидовой. Эти поверхности могут быть также охарактеризованы ортогональностью своей асимптотической сети.

Аналитическая характеристика поверхностей пространства K и их внутренних геометрий может быть получена проще всего из следующих соображений.

Рассмотрим абсолютную инволюцию, т. е. такую пространственную инволюцию, которая оставляет неподвижными все точки абсолютных прямых и, следовательно, переводит в себя несобственные прямые. Обозначая чертой сверху переход от однородных координат данного образа к координатам образа, сопряженного ему в абсолютной инволюции, мы можем так пронормировать матрицу преобразования, чтобы иметь всегда

$$\bar{\bar{x}}^{\alpha} = -x^{\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Рассмотрим фиксированную плоскость ξ_α и пронормируем координаты ее произвольной точки x^α, требуя выполнения условия

$$x^{\alpha}\bar{\xi}_{\alpha} = 1. \tag{2}$$

Любая поверхность может быть задана уравнением

$$z^{\alpha} = x^{\alpha}\cos\theta + \bar{x}^{\alpha}\sin\theta, \tag{3}$$

где θ есть некоторая функция прямоугольных декартовых координат x и y точки x^α, которые мы вводим на плоскости ξ_α, пользуясь тем, что на ней определена геометрия Евклида.

Внутренняя геометрия поверхности, будучи вейлевой, вполне определяется заданием тензора g_{ij}, определяющего угловую метрику, и тензора ω_k, связанного с ним соотношением

$$\nabla_k g_{ij} = \omega_k g_{ij}, \qquad i, j = 1, 2. \tag{4}$$

Пользуясь тем, что точки z^α и x^α соответствуют друг другу в абсолютном соответствии плоскости ξ_α и поверхности, мы можем положить

$$g_{ij}\,du^i\,du^j = dx^2 + dy^2, \tag{5}$$

и при этом будем иметь

$$\omega_1 = -\frac{\partial\theta}{\partial y}; \qquad \omega_2 = \frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{6}$$

Произвольность функции θ показывает, что любая квазиевклидова геометрия будет внутренней геометрией некоторой поверхности пространства K ([3]).

Для того чтобы поверхность была нулевой кривизны, необходимо и достаточно, чтобы функция θ была гармонической ([3]).

Поступило
3 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Mayer, Ann. sci. de l'un. de Jassy, 1 section, 27, 327 (1941). [2] А. Норден, ДАН, 48, № 8 (1945). [3] А. Норден, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, в. 5 (1941). [4] А. Норден, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, в. 2 (1934). [5] G. Fubini et E. Čech, Introduction à la gèometrie projective diffèrentielle des surfaces, Paris, 1931, p. 204.