Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 3

МАТЕМАТИКА

С. НИКОЛЬСКИЙ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ ВИДА $|a-x|^s$

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 22 VII 1946)

1. Благодаря исследованиям С. Н. Бернштейна в настоящее время хорошо известны асимптотические свойства наилучшего приближения многочленами функции $|a-x|^s$ $(s>0)$. Эта заметка посвящена исследованиям наилучшего приближения функции $|a-x|^s$ многочленами в среднем и функций, имеющих особенности подобного вида.

Под наилучшим приближением многочленами степени n функции $f(x)$ в среднем с весом $r(x)$ на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ мы подразумеваем минимум

$$E_{n,\,r(x)}(f)_L=\min_{P_n}\int_{-1}^{+1}|f(x)-P_n(x)|\,r(x)\,dx,\quad E_n(f)_L=E_{n,\,1}(f)_L,$$

распространенный на всевозможные многочлены

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

степени n.

2. Случай $a\geqslant 1$ наиболее простой. Функция $(a-x)^s$ в этом случае имеет на интервале $-1<x<+1$ всюду сохраняющую знак производную любого порядка. Поэтому многочлен $P_n^*(x)$, осуществляющий наилучшее приближение $E_{n,\,r(x)}(|a-x|^s)_L$, может быть эффективно получен, если воспользоваться теоремой Бернштейна [1], в силу которой $P_n^*(x)$ интерполирует $(a-x)^s$ в нулях многочлена $R_{n+1}(x)$ степени $n+1$, наименее уклоняющегося от нуля в смысле

$$\min_{P_n}\int_{-1}^{+1}|x^{n+1}+P_n(x)|\,r(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}|R_{n+1}(x)|\,r(x)\,dx.$$

3. В случае $|a|<1$ к функции $|a-x|^s$ упомянутая теорема Бернштейна неприменима. Однако при некоторых ограничениях, налагаемых на a, она оказывается верной асимптотически. Именно, доказывается при $r(x)\equiv 1$

Лемма 1. *Пусть $P_n(x)$ есть многочлен степени n, совпадающий с функцией $|a-x|^s$ в нулях $x_k^{(n)}=\cos\frac{k\pi}{n+2}$ $(k=1,\ldots,n)$ многочлена*

$$R_{n+1}(x)=\frac{\sin(n+2)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

степени $n+1$ *и пусть* $a=\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+2}$ $(1\leqslant l\leqslant n+1)$, *где* l — *целое число* ($s>-1$, *исключая четное* s).

Тогда имеют место асимптотические равенства

$$E_n(|a-x|^s)_L=\int_{-1}^{+1}\left||a-x|^s-P_n(x)\right|dx+O\left(\frac{\lg n}{n^{s+2}}\right)=$$

$$=\frac{M_s}{n^{s+1}}(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}+O\left(\frac{\lg n}{n^{s+2}}\right)$$

равномерно относительно a, *удовлетворяющих неравенству* $|a|\leqslant\eta<1$, *где*

$$M_s=\frac{8\,|\sin(\pi s/2)|}{\pi}\int_0^\infty|\cos v|\int_0^\infty\frac{u^{s+1}du}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})}dv.$$

При $s=1,3,5,\ldots$ *нечетном целом*

$$M_s=s!\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+2}}.$$

Из леммы 1 с помощью общих рассуждений следует

Теорема 1. *Если* $|a|<1$ и $s>-1$ (*исключая* s *четное*), *то имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(|a-x|^s)_L=\frac{M_s(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+1}}+O\left(\frac{\lg n}{n^{s+2}}\right)=$$

$$=(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}E_n(|x|^s)_L+O\left(\frac{\lg n}{n^{s+2}}\right).$$

4. Пусть вес $r(x)$ обладает свойствами: α) $r(x)>\lambda>0$ для $-1\leqslant x\leqslant 1$; β) существует такое число $q>3/2$, что функция $[r(x)]^q$ суммируема на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$; γ) $r(x)$ непрерывна в точках $-1<a_1<a_2<\ldots<a_m<1$.

Теорема 2. *Если* $s>-1$, $-1<a_1<a_2<\ldots<a_m<1$,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}A_k|x-a_k|^s,$$

то

$$E_{n,\,r(x)}(f)_L\approx\sum_{k=1}^{m}|A_k|E_{n,\,r(x)}(|x-a_k|^s)_L\approx$$

$$\approx\frac{M_s}{n^{s+1}}\sum_{k=1}^{m}|A_k|(1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}}r(a_k)\quad(n\to\infty).\qquad(1)$$

5. Теорема 3. *При* $r(x)\equiv 1$ *теорема* 2 *остается верной, если в ней положить* $m=\infty$, *в предположении, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<\infty.$$

В самом деле, обозначая через $E_n(f; c, d)_L$ наилучшее приближение в среднем функции f на сегменте $[c, d]$ (с весом 1), будем иметь

$$E_n(|x-a|^s)_L \leqslant E_n(|x-a|^s;\ a-2,\ a+2)_L = \\ = E_n(|x|^s; -2, 2)_L = 2^{s+1} E_n(|x|^s)_L.$$

Задав теперь $\varepsilon > 0$, подберем m так, чтобы $\sum\limits_{m+1}^{\infty} |A_k| < \varepsilon$, и положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k |x-a_k|^s + \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k |x-a_k|^s = g(x) + r(x);$$

тогда при достаточно больших n

$$E_n(r)_L \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k| E_n(|x-a_k|^s)_L < \varepsilon\, 2^{s+1} E_n(|x|^s)_L < \frac{\varepsilon 2^{s+2} M_s}{n^{s+1}};$$

$$E_n(g)_L < (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} |A_k| E_n(|x-a_k|^s)_L < \\ < (1+2\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| E_n(|x-a_k|^s)_L;$$

$$E_n(g)_L > (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} |A_k| E_n(|x-a_k|^s)_L > \\ > (1-2\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| E_n(|x-a_k|^s)_L.$$

Откуда, приняв во внимание неравенства

$$E_n(g)_L - E_n(r)_L \leqslant E_n(f)_L \leqslant E_n(g)_L + E_n(r)_L,$$

следует равенство (1) при $m = \infty$.

Теорема 4. *Пусть s — нечетное число и функция $f(x)$ имеет на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ абсолютно непрерывную производную порядка $s-1$, которая в свою очередь является неопределенным интегралом от функции $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$, обладающей следующими свойствами:* 1) *$\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и разлагается в виде суммы $\varphi(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ — функция скачков, а $h(x)$ — абсолютно непрерывная функция;* 2) *$\varphi(x)$ фактически имеет хотя бы один разрыв в интервале $-1 < x < 1$.*

Тогда

$$E_n(f)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}} \frac{M_s}{2s!} \sum_{k=1}^{\infty} (1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} |A_k| \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — точки, в которых $\varphi(x)$ имеет существенные разрывы с (существенными) скачками, $A_k = \varphi(a_k+0) - \varphi(a_k-0) \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Можно доказать справедливость неравенства

$$E_{n-1}(f)_L \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{var} f}{n} \tag{3}$$

для любого n. При этом в нем постоянную $\pi/2$ нельзя уменьшить.

Функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы, можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt+P_{s-1}(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}g(t)\,dt+H(x)+P_{s-1}(x),$$

где $P_{s-1}(x)$ — многочлен степени $s-1$, а $H(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка s. При этом, не изменяя этих равенств, функции φ и g можно видоизменить на счетном множестве точек так, чтобы они были непрерывными справа для $-1<x<1$.

Покажем, что

$$E_n(H)_L=o(n^{-s-1})\quad(n\to\infty). \tag{4}$$

В самом деле, если $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция, то она есть неопределенный интеграл от $F'(x)$. Существует последовательность многочленов $P_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ таких, что $\int\limits_{-1}^{+1}|F'(x)-$ $-P_n(x)|\,dx=\varepsilon_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Если поэтому $Q'_{n+1}(x)=P_n(x)$, то $E_{n+1}(F)_L=E_{n+1}(F-Q_{n+1})\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon_n}{n+1}=o(n^{-1})$, и мы доказали (4) при $s=0$. При произвольном целом s эти обычные рассуждения нужно повторить по индукции.

Функция скачков равна $g(x)=\sum\limits_k A_k\sigma_{a_k}(x)$, где $\sigma_a(x)=1$ для $x\geqslant a$ и $\sigma_a(x)=0$ для $x<a$ и, так как

$$\sum_k|A_k|<\infty,\quad \int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\sigma_a(t)\,dt=\frac{|x-a|^s+(x-a)^s}{2s},$$

то, воспользовавшись теоремой 3, будем иметь (2).

Примечание. Нет сомнения, что теорема справедлива и для четного s, только в равенстве (2) константа M_s должна быть заменена на другую константу $M'_s=\lim n^{s+1}E_n(x|x|^{s-1})_L$ (см. примечание в моей заметке [4]).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
22 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, О многочленах, ортогональных в конечном интервале, 1937. [2] Он же, ДАН, **18**, № 7 (1938). [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. математ., № 3 (1946). [4] Он же, ДАН, **55**, № 2 (1947).