Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 3

МАТЕМАТИКА

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

О k-ЧЛЕННЫХ ТАБЛИЦАХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СУММУ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 VII 1946)

Расчетные формулы (содержащие три параметра), встречающиеся в вычислительной практике, весьма часто представляют сумму произведений функций, каждая от одного переменного, или функцию от такой суммы. Так, например, в навигационной практике неоднократно встречается необходимость в табулировании функции вида

$$u = f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{F}[f_1(x_1) f_2(x_2) + f_3(x_1) f_4(x_2) f_5(x_3)].$$

В настоящей заметке мы рассматриваем вопрос о построении k-членных таблиц для функций трех переменных вида

$$u_n = f_n(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \Phi_n \left\{ \sum_{i=1}^{n} [f_{i1}(x_1) f_{i2}(x_2) f_{i3}(x_3)] + \varphi_1(x_p) \varphi_2(x_q) + \psi_1(x_q) \right\}, \quad (1)$$

где p, $q = 1$, 2 или 3 и $p \neq q$.

В статье (1) мы рассмотрели вопрос о двух- и трехчленных таблицах для функций трех переменных, основанных на представлении их в виде суперпозиции двух—трех функций двух переменных, и указали необходимые и достаточные условия существования таких представлений.

Можно убедиться не только с помощью этих условий, но и непосредственно, что если в (1) положить $n = 1$, то получим функцию $u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$, допускающую построение трехчленной таблицы, основанной на представлении вида

$$\Phi \left\{ F[\eta(x_i, x_j), x_p], x_q \right\}, \quad (2)$$

i, j, p — какая-нибудь перестановка индексов 1, 2, 3 и $q = i$ или j.

Действительно, при $n = 1$ наша функция будет иметь вид

$$\Phi_1 [f_{11}(x_1) f_{12}(x_2) f_{13}(x_3) + \varphi_1(x_p) \varphi_2(x_q) + \psi_1(x_q)] .$$

Это выражение можно представить в виде (2), положив при $p = 1$, 2 или 3, соответственно:

1) $f_{12}(x_2) f_{13}(x_3) = \eta$; 2) $f_{11}(x_1) f_{13}(x_3) = \eta$ или 3) $f_{11}(x_1) f_{12}(x_2) = \eta$

и, соответственно,

$$1)\ f_{11}(x_1)\,\eta + \varphi_1(x_1) = F;\quad 2)\ f_{12}(x_2)\,\eta + \varphi_1(x_2) = F$$

или

$$3)\ f_{13}(x_3)\,\eta + \varphi_1(x_3) = F$$

и, наконец,

$$\Phi_1\,[\varphi_2(x_q)\,F + \psi_1(x_q)] = \Phi\,.$$

С помощью приема, примененного в ([2]) при табулировании функции четырех переменных вида $\Phi\,\{F\,[f_1(x_i, x_j)\,x_p], x_q\}$, можно для нашей функции получить конструкцию таблицы вида A ([2]), дающую ее значения с помощью четырех входов. Легко убедиться, что, за исключением случая, когда отношение функции $\varphi_2(x_q)$ к той из функций f_{11}, f_{12}, f_{13}, которая зависит от того же аргумента x_q, есть const, наша функция не допускает представления в виде суперпозиции двух функций двух переменных. Это потому, что тогда она не удовлетворяет уравнению (4) ([1]), т. е. не допускает построения двухчленной таблицы, для которой только и возможна табличная конструкция с тремя входами (см. схему на стр. 136 в ([1])).

Следовательно, конструкция A, вообще говоря (за упомянутым выше исключением), является для нашей функции (вид (1) при $n = 1$) конструкцией с минимальным числом входов.

Перейдем теперь к k-членным таблицам для функции вида (1) при любом n.

Теорема. *Для функций вида* (1) *возможна конструкция* $2n+1$-*членной таблицы с числом входов, равным* $2n + 2 + \mathrm{E}\left(\frac{2n}{3}\right)$*.

Так, например, для функции вида $F\,[f_{11}(x_1)f_{12}(x_2)f_{13}(x_3) + f_{21}(x_1)f_{22}(x_2)f_{23}(x_3) + \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + \psi_1(x_q)]$, получающейся из (1) при $n = 2$, можно построить пятичленную таблицу с семью входами.

Доказательство этого вытекает из последующих двух лемм. Сначала докажем (методом математической индукции) следующую лемму:

Лемма 1. *Функция вида* (1) *при любом n допускает построение* $2n+1$-*членной таблицы, основанной на представлении вида*:

$$\gamma_{2n+1}(\ldots(\gamma_3(\gamma_2(\gamma_1(x_{i_1}, x_{i_2})\,x_{i_3})\ldots), x_{i_{2n+2}}) \tag{3}$$

($i_1, i_2, \ldots, i_{2n+2}$ принимают значения 1, 2 или 3 и $i_s \neq i_{s+1}$.

При $n = 1$ лемма уже была доказана выше.

Докажем теперь, что если лемма верна для функции

$$u_n = f_n(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \Phi_n\left[\sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_1)\,f_{i2}(x_2)\,f_{i3}(x_3) + \varphi_1(x_p)\,\varphi_2(x_q) + \psi_1(x_q)\right],$$

то она верна и для функции

$$u_{n=1} = f_{n+1}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \Phi_{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n+1} f_{i1}(x_1)\,f_{i2}(x_2)\,f_{i3}(x_3) + \varphi_1(x_p)\,\varphi_2(x_q) + \psi_1(x_q)\right].$$

---

* Знак E означает целую часть.

Прежде всего заметим, что нашу лемму достаточно доказать для выражений, заключенных в квадратные скобки при Φ_n и Φ_{n+1}, которые обозначим, соответственно, через F_n и F_{n+1}.

Положим:

1) $$\sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x_1) f_{i2}(x_2) f_{i3}(x_3) = F_n, \quad \frac{F_n}{\varphi_2(x_2)} = F_n^*, \quad \frac{F_n^*}{f_{n+1,1}(x_1)} = F_n^{**};$$

2) $$\frac{f_{n+1,2}(x_2)}{\varphi_2(x_2)} = f^*_{n+1,2}(x_2);$$

3) $$p = 1, \; q = 2.$$

Легко убедиться, что и при других возможных системах значений p и q индукция также проходит.

При принятых выше обозначениях можем написать

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1} &= F_n + f_{n+1,1}(x_1) f_{n+1,2}(x_2) f_{n+1,3}(x_3) + \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + \psi_1(x_2) = \\ &= \psi_1(x_2) + \varphi_2(x_2)\left[F_n^* + f_{n+1,1}(x_1) f_{n+1,2}(x_2) f_{n+1,3}(x_3) + \varphi_1(x_1)\right] = \\ &= \psi_1(x_2) + \varphi_2(x_2)\left\{f_{n+1,1}(x_1)\left[F_n^{**} + f^*_{n+1,2}(x_2) f_{n+1,3}(x_3)\right] + \varphi_1(x_1)\right\}.\end{aligned}$$

Функция $F_n^{**} + f^*_{n+1,2}(x_2) f_{n+1,3}(x_3) = F$ имеет такой же вид, как и функция F_n (в которой $\psi_1(x_q) = 0$), о которой было предположено, что она $2n+1$-членно табулируемая функция. Следовательно, функция

$$\mathrm{F}_{n+1} = \psi_1(x_2) + \varphi_2(x_2)\left[f_{n+1,1}(x_1) F + \varphi_1(x_1)\right]$$

допускает построение $2n+3$-членной таблицы, что и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Для m-членно табулируемой функции вида* (3) *может быть построена таблица с числом входов, равным* $m + \mathrm{E}\left(\frac{m+2}{3}\right)$.

Рассмотрим три случая: $m = 3t$, $m = 3t - 1$ и $m = 3t + 1$.

Начнем с первого. Пусть имеем m-членно табулируемую функцию вида (3), $m = 3t$,

$$u_m = f_{1m}(\ldots(f_{13}(f_{12}(f_{11}(x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3}), x_{i_4})\ldots), x_{i_{m+1}}) \quad (i_s \neq i_{s-1}). \tag{4}$$

Пусть

$$\begin{aligned} v_1 &= f_{13}(f_{12}(f_{11}(x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3}), x_{i_4}) = \\ &= f_{2,m-3}(\ldots(f_{22}(f_{21}(u_m, x_{i_{m+1}}), x_{i_m}), \ldots), x_{i_5}) \end{aligned} \tag{5}$$

равносильно (4). Применив к табулированию функции

$$v_1 = f_{13}(f_{12}(f_{11}(x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3}), x_{i_4})$$

прием, примененный нами в ([2]) при табулировании функции четырех переменных такого вида, мы получим таблицу, дающую значения v_1 с четырьмя входами.

Заменим $v_1 = f_{2,m-3}(\ldots(f_{22}(f_{21}(u_m, x_{i_{m+1}}), x_{i_m})\ldots), x_{i_5})$ равносильным

$$\begin{aligned} v_2 &= f_{33}(f_{32}(f_{31}(v_1, x_{i_5}), x_{i_6}), x_{i_7}) = \\ &= f_{2,m-6}(\ldots(f_{23}(f_{22}(f_{21}(u_m, x_{i_{m+1}}), x_{i_m}), x_{i_{m-1}})\ldots), x_{i_8}) \end{aligned}$$

и построим, пользуясь вышеуказанным приемом, вторую таблицу с четырьмя входами для $v_2 = f_{33}(f_{32}(f_{31}(v_1, x_{i_5}), x_{i_6}), x_{i_7})$.

Продолжая этот процесс „расчленения“ выражений (4), мы для рассматриваемого случая $m = 3t$ в t приемов, очевидно, исчерпаем его. Так как каждый шаг (прием) выделяет функцию, которая табулируется с четырьмя входами, то всего для табулирования m-членно ($m = 3t$) табулируемой функции вида (4) понадобится $4t$ входов.

Во втором случае, когда $m = 3t - 1$, мы, применяя вышеописанный процесс „расчленения“ выражения (4) $t - 1$ раз, получим $t - 1$ таблиц, каждую с четырьмя входами, и в остатке одну двухчленно табулируемую функцию, для которой возможна конструкция с тремя входами. Таким образом, в случае $m = 3t - 1$ общее количество входов будет равно $(t - 1)4 + 3 = 4t - 1$.

И, наконец, применяя тот же процесс „расчленения“ выражения (4) для случая $m = 3t + 1$, мы убедимся, что общее число входов равно $4t + 2$.

Итак, общее число входов во всем комплексе таблиц, дающих возможность путем пользования ими в определенной последовательности находить значения m-членно табулируемой функции вида (4), равно $4t$ при $m = 3t$, $4t - 1$ при $m = 3t - 1$ и $4t + 2$ при $m = 3t + 1$. Легко убедиться, что выражения для общего числа входов m-членно табулируемой функции во всех трех случаях можно объединить в формуле, данной в лемме 2.

Леммы 1 и 2, очевидно, и доказывают нашу теорему. Точно так же (методом математической индукции) можно показать, что если в выражении для функции (1) $\varphi_1(x_p) = \text{const}$, то она допускает построение $2n$-членной таблицы, основанной на представлении вида (3). Общее число входов в этом случае, на основании леммы 2, будет равно $2n + \mathrm{E}\left(\frac{2(n+1)}{3}\right)$.

Поступило
27 VII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **36**, № 4—5 (1942). [2] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **43**, № 4 (1944).